

Desátá série domácích úkolů  
verze pro cvičení v pátek od 10:40

- Řešení dodejte nejpozději ve čtvrtek 12. května.
- Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit přezdívku.
- Číslo v rámečku u zadání označuje bodové ohodnocení příkladu.

---

1. V tomto příkladu uvažujeme čtvercové tabulky rozdělené na  $N \times N$  políček obarvených  $b$  barvami. Připomeňme definici podtabulky ze cvičení: podtabulku tvaru  $k \times k$  v nějaké tabulce tvaru  $N \times N$  získáme tak, že v původní tabulce vybereme libovolných  $k$  řádků a  $k$  sloupců (ne nutně sousedících) a uvážíme všechna políčka ležící na průniku vybraného sloupce s vybraným řádkem. Dokažte následující tvrzení:

1+2

(a) Pro libovolné  $b \geq 2$  existuje  $N$  takové, že v libovolném obarvení tabulky tvaru  $N \times N$  pomocí  $b$  barev existuje podtabulka velikosti  $2 \times 2$ , jejíž políčka jsou všechna obarvena stejnou barvou. (Za důkaz získáte 1 bod, a pokud ještě navíc dokážete, že tvrzení platí pro nějaké  $N \leq b^{100}$ , získáte 2 body navíc.)

2

(b) Pro libovolná čísla  $b$  a  $k$  existuje  $N$  s následující vlastností: v libovolném obarvení políček tabulky tvaru  $N \times N$  pomocí  $b$  barev existuje podtabulka velikosti  $k \times k$ , jejíž políčka jsou všechna obarvena stejnou barvou.

2

2. Dokažte, že pro libovolné  $N \geq 2$  existuje způsob, jak obarvit hrany úplného grafu  $K_N$  červeně a modře tak, že červených hran bude více než modrých, a přesto nebude existovat žádná červená kopie grafu  $K_3$ .