Šestá série domácích úkolů
verze pro cvičení v pátek od 10:40

- Řešení dodejte nejpozději ve čtvrtek 14. dubna.
- Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit přezdívku.
- Číslo v rámečku u zadání označuje bodové ohodnocení příkladu.

$\boxed{1}$ 1. Nechť (B, P) je konečná projektivní rovina. Dokažte, že (B, P) má systém různých reprezentantů. (*Nápověda: vzpomeňte si, kolik bodů leží na přímce a kolik přímek prochází jedním bodem v KPR.*)

$\boxed{2}$ 2. Nechť M je čtvercová matice tvaru $n \times n$, jejíž prvky jsou nezáporná reálná čísla. Předpokládejme, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí, že součet čísel v i-tém řádku M je roven jedné a také součet čísel v i-tém sloupci M je roven jedné. Dokažte, že je možné na každém řádku matice M vybrat jedno políčko obsahující kladné číslo tak, že žádná dvě vybraná políčka nebudou ve stejném sloupci.

$\boxed{2}$ 3. Nechť n a k jsou celá čísla splňující $1 \leq k \leq n$. Označme symbolem $G_{n,k}$ hypergraf, který má vrcholy $\{1, 2, \ldots, n\}$ a jehož hyperhrany jsou právě všechny k-prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Rozhodněte, pro které hodnoty n a k má $G_{n,k}$ systém různých reprezentantů.

$\boxed{1+2}$ 4. Mějme hypergraf $G = (V, H)$. Řekneme, že funkce $r\colon H \to V$ tvoří *systém skororůzných reprezentantů* (SSR), pokud pro každou hyperhranu $h \in H$ je její 'reprezentant' $r(h)$ prvkem h, a navíc každý vrchol $x \in V$ je reprezentantem nejvýše dvou různých hyperhran. Dokažte, že hypergraf $G = (V, H)$ má SSR, právě když platí

$$\forall F \subseteq H\colon \left| \bigcup_{h \in F} h \right| \geq \frac{|F|}{2}.$$

(Za důkaz jedné implikace dostanete 1 bod, za důkaz obou 3 body.)