

Třetí série domácích úkolů
verze pro cvičení v pátek od 10:40

- Řešení dodejte nejpozději ve čtvrtek 17. března.
 - Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit prezdívkou.
 - Číslo v rámečku u zadání označuje bodové ohodnocení příkladu.
-

1. Odvoďte explicitní vzorec v uzavřeném tvaru pro n -tý člen následujících posloupností ('explicitní vzorec v uzavřeném tvaru' zde znamená vzorec, který vyjádří příslušný n -tý člen jako funkci n , bez použití sum či podobných výrazů).

- 2 (a) posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ taková, že $a_0 = 1$ a pro $n \geq 1$ platí $a_n = 2a_{n-1} + n + 1$.
- 2 (b) posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ taková, že $b_0 = 0$ a pro $n \geq 1$ platí $b_n = 1 - \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{n-1} b_k$.
- 1 (c) posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$c_n = \binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \cdots + \binom{n+5}{5} = \sum_{k=0}^n \binom{k+5}{5}.$$

- 2 2. Nechť $q(n) = q_0 + q_1n + q_2n^2 + \cdots + q_dn^d$ je nějaký polynom v proměnné n stupně d . Ukažte, že posloupnost hodnot tohoto polynomu $q(0), q(1), q(2), \dots$ má vytvářející funkci tvaru

$$A(x) = \frac{P(x)}{(1-x)^{d+1}},$$

kde $P(x)$ je nějaký polynom v proměnné x stupně nejvýš d . Zdá-li se vám to těžké, dokažte to aspoň pro nějakou konkrétní (pokud možno co největší) hodnotu $d \in \mathbb{N}$.