Druhá série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději do neděle 16. listopadu.

Při řešení můžete bez důkazu používat jakékoliv věty z přednášky, tvrzení dokázaná na cvičení a také věty, které znáte z jiných přednášek (třeba Ramseyovu větu).

Některé otázky jsou označené jako bonusové. Tyto otázky jsou ryze dobrovolné, nezískáte za ně žádné body a jejich vyřešení nemá vliv na zisk zápočtu. Pokud ovšem zvládnete vyřešit hodně bonusových příkladů, budu k vám pak o něco shovívavější u zkoušky.

Vrcholovou barevnost grafu G značím $\chi(G)$.

Příklad 1. Nakreslete na torus co největší úplný graf [za K_6 získáte 1 bod, za K_7 2 body].

Příklad 2. Nechť $G = (V, E)$ je graf, a nechť $\overline{G}$ je doplněk grafu G, tj. $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

- Dokažte, že $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$ [2 body].
- Dokažte, že $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$ [2 body].

Příklad 3. Nechť G je 3-regulární, vrcholově 2-souvislý rovinný graf. Ukažte, že G má hranovou barevnost 3. Smíte bez důkazu použít větu o čtyřech barvách, tj. smíte předpokládat, že každý rovinný graf má vrcholovou barevnost nejvýše 4 [2 body].

Bonusová úloha: ukažte naopak, bez použití věty o 4 barvách, že pokud 3-regulární vrcholově 2-souvislý rovinný graf G má hranovou barevnost 3, tak v každém rovinném nakreslení G lze obarvit stěny čtyřmi barvami, aby sousední stěny měly různé barvy.

Ve zbývajících dvou příkladech používám konvenci, že dva izomorfní grafy pokládám za totožné. Formálněji řečeno, slovem 'graf' neoznačuji jeden konkrétní graf, ale celou třídu izomorfismu grafů.

Příklad 4. Označme $G \preccurlyeq_m H$ relaci "G je minor H". Nechť F je nějaká množina grafů. Označme $\mathrm{Forb}(F)$ množinu všech těch grafů, které neobsahují žádný graf z množiny F jako minor (takže například $\mathrm{Forb}(\{K_5, K_{3,3}\})$ je přesně množina rovinných grafů, dle Kuratowského–Wagnerovy věty). Nechť $\mathcal{M}$ je libovolná množina grafů. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní [2 body]:

1) Množina $\mathcal{M}$ je *uzavřená vůči minorům*, tj. pro každý graf G patřící do $\mathcal{M}$ platí, že i každý minor G patří do $\mathcal{M}$.
2) Existuje množina grafů F (třeba i nekonečná) taková, že $\mathcal{M} = \mathrm{Forb}(F)$. (Takové množině F se obvykle říká *množina zakázaných minorů* pro $\mathcal{M}$.)

Příklad 5. Dokažte, že následující tři tvrzení jsou navzájem ekvivalentní [3 body]:

A) Relace $\preccurlyeq_m$ nemá na množině grafů žádný nekonečný antiřetězec, tj. v každé nekonečné množině grafů lze najít dva různé grafy, z nichž jeden je minorem druhého.

B) Pro každou množinu grafů $\mathcal{M}$, která je uzavřená vůči minorům, existuje nějaká konečná množina grafů F taková, že $\mathcal{M} = \mathrm{Forb}(F)$.

C) Pro libovolnou nekonečnou posloupnost grafů $G_1, G_2, \ldots$ existují dva indexy $i < j$ takové, že $G_i \preccurlyeq_m G_j$.

(Poznámka: tvrzení A, B, C jsou všechna pravdivá. Jsou to tři ekvivalentní formulace tzv. Robertsonovy–Seymourovy věty, jejíž důkaz je ovšem velmi dlouhý a náročný.)

Bonusová úloha: ukažte, že existuje nekonečná množina grafů $\{G_1, G_2, \ldots\}$ taková, že pro libovolné $i \neq j$ graf G_i neobsahuje žádné dělení grafu G_j jako podgraf.