První série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději během pondělí 4. listopadu. Na cvičeních 5. a 6. listopadu ukážu k některým příkladům nápovědu. Řešení můžete odevzdávat i po nápovědě, ale dostanete za ně jen polovinu standardního bodového ohodnocení.

Příklad 1. Dokažte, že každý strom má nejvýš jedno perfektní párování [1 bod].

Příklad 2. Nechť $\mu(G)$ označuje velikost největšího párování v grafu G. Řekneme, že párování P grafu $G = (V, E)$ je *maximální*, pokud pro každou nepárovací hranu $e \in E \setminus P$ platí, že $P \cup \{e\}$ není párování. Dokažte, že libovolné maximální párování libovolného grafu G má aspoň $\frac{1}{2}\mu(G)$ hran [3 body]. Ukažte, že tento odhad je nejlepší možný, tj. najděte graf G s maximálním párováním P, které má velikost $\frac{1}{2}\mu(G)$ [1 bod].

Příklad 3. Nechť T je strom se sudým počtem vrcholů. Dokažte, že T má perfektní párování, právě když pro každý jeho vrchol x platí, že graf $T - \{x\}$ má právě jednu lichou komponentu [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body].

Příklad 4. Nechť $G = (V, E)$ je 3-regulární 2-souvislý graf a nechť $e \in E$ je libovolná jeho hrana. Dokažte, že graf G má perfektní párování, které neobsahuje hranu e [3 body].

Příklad 5. Najděte graf na dvanácti vrcholech, jehož každý vrchol má stupeň aspoň pět a který nemá perfektní párování [2 body].