Diskrétní matematika 2017/2018

3. cvičení

Příklad 1. Rozhodněte, zda jsou následující relace ekvivalence. Pokud ano, určete třídy ekvivalence.

(a) $X = \mathbb{N}, xR_1y \Leftrightarrow p|(x-y)\ p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ pevné,

(b) $X = \mathbb{Z} \setminus 0, xR_2y \Leftrightarrow x|y \wedge y|x$,

(c) $X = \mathbb{N}, xR_3y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} \setminus 1 : z|y \wedge z|x$.

(Uvažujme dělitelnost i v záporných číslech, tj. např. $(-1)|1$, příp. si představte, že jsou levé i pravé části výrazu dělitelnosti v absolutní hodnotě.)

Příklad 2. Dokažte, že pro každou ekvivalenci R na X platí, že $R[x]$ (třída ekvivalence určená prvkem x) je neprázdná množina pro každý prvek $x \in X$.

Příklad 3. Které z následujících relací na množině $\mathbb{N}^2$(dvojice přirozených čísel) jsou uspořádáními? Která z uspořádání jsou lineární?

- Porovnání po obou souřadnicích $\leq_S$: $(a,b) \leq_S (x,y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \leq y$.
- Porovnání v alespoň jedné souřadnici $\leq_U$: $(a,b) \leq_U (x,y) \Leftrightarrow a \leq x \vee b \leq y$.

Příklad 4. Uvažme relaci „x je dělitelem čísla y" na množině $1, ..., n$.

- Dokažte, že tato relace je uspořádání. Je tato relace lineární uspořádání?
- Nakreslete Hasseho diagram pro $n = 10$. Určete minimální, maximální, nejmenší a největší prvek.
- Čemu v tomto uspořádání odpovídá infimum a supremum neprázdné podmnožiny?

Příklad 5. Rozhodněte, zda existuje uspořádání splňující danou podmínku. Pokud existuje, uveďte příklad:

- Bez největšího prvku, na konečné neprázdné množině.
- Bez největšího i nejmenšího prvku na konečné neprázdné množině.
- Bez největšího i bez maximálního prvku na konečné neprázdné množině.
- Bez největšího i bez maximálního prvku na nekonečné množině.

Informace o cvičení viz `http://kam.mff.cuni.cz/~janca/diskretka1718.php`.