Diskrétní matematika 2017/2018

2. cvičení

Příklad 1. Dokažte, že pro Fibonacciho posloupnost $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Příklad 2. Dokažte matematickou indukcí:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

Příklad 3. Napište všechny prvky kartézského součinu $A \times B$ množin $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{4, 5\}$.

Příklad 4. Nalezněte relace R a S takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.

Příklad 5. Nechť R a S jsou reflexivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také reflexivní?

- $R \cup S$
- $R \cap S$
- $R \setminus S$
- $R \triangle S$
- $R \circ S$
- R^{-1}

A co kdyby byly R a S tranzitivní místo reflexivní?

Příklad 6. Rozhodněte, zda jsou následující relace ekvivalence. Pokud ano, určete třídy ekvivalence.

(a) $X = \mathbb{N}, xR_1y \Leftrightarrow p|(x - y)$ $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ pevné,

(b) $X = \mathbb{Z} \setminus 0, xR_2y \Leftrightarrow x|y \wedge y|x$,

(c) $X = \mathbb{N}, xR_3y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} \setminus 1 : z|y \wedge z|x$.

(Uvažujme dělitelnost i v záporných číslech, tj. např. $(-1)|1$, příp. si představte, že jsou levé i pravé části výrazu dělitelnosti v absolutní hodnotě.)

Příklad 7. Dokažte, že pro každou ekvivalenci R na X platí, že $R[x]$ (třída ekvivalence určená prvkem x) je neprázdná množina pro každý prvek $x \in X$.

Příklad 8. Nechť X je konečná množina a R na X antisymetrická relace. Ukažte, že každá relace $R' \subset R$ je také antisymetrická.

Informace o cvičení viz `http://kam.mff.cuni.cz/~janca/diskretka1718.php`.