# Diskrétní matematika 2017/2018

*10. cvičení*

---

**Rozcvička**

*Příklad* 1. Nalezněte všechny grafy, které neobsahují cestu $P_3$ jako

(a) podgraf,

(b) indukovaný podgraf.

*Příklad* 2. Najděte příklad dvou grafů, z nichž jeden je strom a druhý není strom, se stejným skóre.

---

*Příklad* 1. Charakterizujte grafy, které jde nakreslit jedním tahem, jenž nemusí být nutně uzavřený.

*Příklad* 2. Dokažte, že každý eulerovský graf je disjunktním sjednocením kružnic.

*Příklad* 3.

(a) Dokažte, že **orientovaný** graf $G$ obsahuje uzavřený eulerovský tah právě tehdy, když $G$ je silně souvislý a každý vrchol $G$ má stejný počet vstupních a výstupních hran.

(b) Zkuste tvrzení zesílit. Buďto přímo a nebo ukažte, že pro takový graf (tj. graf, ve kterém má každý vrchol stejný počet výstupních a vstupních vrcholů, platí, že $G$ je slabě souvislý právě tehdy, když je silně souvislý.

(Silná souvislost znamená, že mezi každou dvojicí vrcholů $u$ a $v$ vede jak orientovaná cesta z $u$ do $v$, tak orientovaná cesta z $v$ do $u$. Slabá souvislost znamená, že mezi libovolnými dvěma vrcholy vede cesta, jejíž hrany mohou být orientovány jak po, tak proti směru cesty.)

*Příklad* 4. Dokažte, že každý strom na alespoň dvou vrcholech má alespoň 2 listy.

*Příklad* 5. Dokažte nebo vyvraťte, že každý indukovaný podgraf stromu je strom.

*Příklad* 6. Dokažte, že pokud v konečném stromu existuje vrchol stupně $k$, tak potom strom má alespoň $k$ listů.

*Příklad* 7. Dokažte, že graf $G = (V, E)$, který nemá kružnice a pro který platí, že $|V| = |E| + 1$ je strom.

---

*Příklad* 8 (*). Dokažte, že každý graf $G$ na alespoň 3 vrcholech s minimálním stupněm vrcholů alespoň $n/2$ je hamiltonovský.

(Graf je hamiltonovský, jestliže v něm existuje hamiltonovská kružnice, tj. kružnice procházející všemi vrcholy — jinak si lze představit jako uzavřený eulerovský tah, ve kterém se nesmí opakovat vrcholy.)