Diskrétní matematika 2017/2018

1. cvičení

Příklad 1. V tajuplném sklepení stojí 3 truhlice. V jedné jsou diamanty, v druhé zlato, ve třetí švábi. Jednou si někdo dal tu práci, aby každou truhlici označil cedulkou popisující, co je uvnitř. A podruhé si někdo jiný dal tu práci, aby cedulky proházel tak, že ani jedna nesouhlasí. Jak na co nejméně otevření truhlic zjistit, která je která?

Příklad 2. V zájmu vědy jste na metrovou tyč rozmístili 25 mravenců. Na počátku všichni mravenci stojí na místě. Když tlesknete, každý mravenec se rozejde rychlostí 1 cm/s směrem k jednomu z konců tyče. Pokud dojde na konec tyče, spadne dolů a dál se pokusu neúčastní. Pokud se dva mravenci potkají, nemohou se vyhnout, takže se oba otočí čelem vzad a pokračují v chůzi. Dokažte, že pro každou možnou volbu počáteční polohy a směru mravenců platí, že všichni mravenci do 100 sekund popadají.

Příklad 3. Dokažte matematickou indukcí následující tvrzení:

(*a*) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$,

(*b*) $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$.

Příklad 4. Dokažte matematickou indukcí následující tvrzení:

$$3/(4^n + 5),$$

kde n je přirozené nezáporné číslo.

Příklad 5. Dokažte, že pro Fibonacciovu posloupnost $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

Příklad 6. Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.

(Nápověda: Vhodně si označte trojici, resp. prostřední číslo.)

Příklad 7. Dokažte, že n přímek rozdělí rovinu nejvýše na $1 + \frac{1}{2}(n^2 + n)$ částí.

Příklad 8. Dokažte, že pomocí tříkorunových a pětikorunových mincí lze zaplatit každou celočíselnou částku větší než 7 Kč.