Diskrétní matematika 2016/2017

3. cvičení

Příklad 1. Které z následujících relací na množině $\mathbb{N}^2$(dvojice přirozených čísel) jsou uspořádáními? Která z uspořádání jsou lineární?

- Porovnání po obou souřadnicích $\leq_S$: $(a,b) \leq_S (x,y) \Leftrightarrow a \leq x \wedge b \leq y$.
- Porovnání v alespoň jedné souřadnici $\leq_U$: $(a,b) \leq_U (x,y) \Leftrightarrow a \leq x \vee b \leq y$.

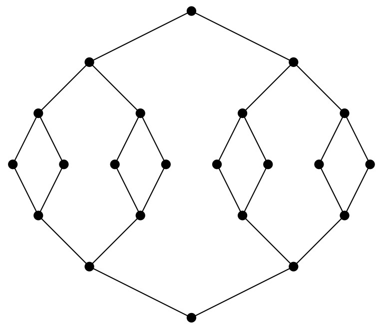
Příklad 2. Uvažme relaci „x je dělitelem čísla y“ na množině $1, ..., n$.

- Dokažte, že tato relace je uspořádání. Je tato relace lineární uspořádání?
- Nakreslete Hasseho diagram pro $n = 10$. Určete minimální, maximální, nejmenší a největší prvek.
- Čemu v tomto uspořádání odpovídá infimum a supremum neprázdné podmnožiny?

Příklad 3. Rozhodněte, zda existuje uspořádání splňující danou podmínku. Pokud existuje, uvědte příklad:

- Bez největšího prvku, na konečné neprázdné množině.
- Bez největšího i nejmenšího prvku na konečné neprázdné množině.
- Bez největšího i bez maximálního prvku na konečné neprázdné množině.
- Bez největšího i bez maximálního prvku na nekonečné množině.

Příklad 4. U uspořádání daného následujícím Hasseho diagramem vyznačte nějaký maximální řetězec a antiřetězec. U antiřetězce zdůvodněte, proč nelze najít delší.



Příklad 5. Mějme funkce $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definované $f(n) = 2n$ a $g(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Určete vlastnosti $f, g, f \circ g, g \circ f$.

Příklad 6. Najděte

(a) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$,

(b) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$,

(c) prosté zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{N}$ (nebo dokonce zkonstruujte bijekci).