Diskrétní matematika 2016/2017

2. cvičení

Příklad 1. Napište všechny prvky kartézského součinu $A \times B$ množin $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{4, 5\}$.
Příklad 2. Nalezněte relace R a S takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.
Příklad 3. Nechť R a S jsou reflexivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také reflexivní?

- $R \cup S$
- $R \cap S$
- $R \setminus S$
- $R \triangle S$
- $R \circ S$
- R^{-1}

A co kdyby byly R a S tranzitivní místo reflexivní?

Příklad 4. Rozhodněte, zda jsou následující relace ekvivalence. Pokud ano, určete třídy ekvivalence.

(a) $X = \mathbb{N}, xR_1y \Leftrightarrow p|(x-y)$ $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ pevné,

(b) $X = \mathbb{Z} \setminus 0, xR_2y \Leftrightarrow x|y \wedge y|x$,

(c) $X = \mathbb{N}, xR_3y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : z|y \wedge z|x$.

Příklad 5. Nechť X je konečná množina a R na X antisymetrická relace. Ukažte, že každá relace $R' \subset R$ je také antisymetrická.

Příklad 6. Ukažte, že pro zobrazení $f : X \to X$ na konečné množině X platí, že f je prosté právě tehdy, když f je na.

Příklad 7. Nechť $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$ jsou funkce takové, že pro každé $x \in X$ platí $(g \circ f)(x) = x$ a pro každé $y \in Y$ platí, že $(f \circ g)(y) = y$.Dokažte, že

(a) Pokud $g \circ f$ je prostá, pak f je prostá.

(b) Pokud $g \circ f$ je na, pak f je na.

Příklad 8. Najděte

(a) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$,

(b) bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^2$,

(c)* prosté zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{N}$. (Nebo dokonce zkonstruujte bijekci.)

Příklad 9. Nechť $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$ jsou funkce takové, že pro každé $x \in X$ platí $(g \circ f)(x) = x$ a pro každé $y \in Y$ platí, že $(f \circ g)(y) = y$. Dokažte, že f i g jsou bijekce (tedy prosté a na).