

Cvičení: Lineární algebra I – 22. listopadu 2013

Báze

8.1. Poznámka. Připomenutí definice báze. Kanonická báze \mathbb{R}^n . Dimenze.

8.2. Příklad. Najděte bázi a určete dimenzi prostoru W obsahující vektor $w = (1, -5, -4, -6)^T$ a která je zároveň lineárním obalem vektorů $u_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $u_2 = (1, 0, 1, 0)^T$ a $u_3 = (3, -1, 2, 2)^T$.

8.3. Příklad. Ukažte, že množina B je bázi vektorového prostoru V a vyjádřete vektor $v \in V$ souřadnicemi vůči bázi B . Kde

1. $B = \{(2, 1, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (1, 1, 3)^T\}$, $v = (1, 1, 1)$ a $V = \mathbb{R}^3$,
2. $B = \{(1, 2, 1)^T, (2, 9, 0)^T, (3, 3, 4)^T\}$, $v = (0, 2, 1)$ a $V = \mathbb{R}^3$,
3. $B = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$, $v = 2x^2 + 1$ a $V =$ množina polynomů stupně nejvýše 2.
4. $B = \{x^n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$, $v = 4x^3 + 2x + 3$ a $V =$ množina všech polynomů.

8.4. Příklad. Určete bázi a dimenzi vektorového prostoru daného soustavou rovnic (nad \mathbb{R}):

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + x_6 &= 0 \\2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0.\end{aligned}$$

8.5. Příklad. Najděte bázi podprostoru vektorového prostoru \mathbb{Z}_5^3 (resp. \mathbb{Z}_7^3) daného řešením rovnic v tělese \mathbb{Z}_5 (resp. \mathbb{Z}_7) a určete jeho dimenzi:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Lineární zobrazení

8.6. Poznámka. Definice lineárního zobrazení.

8.7. Příklad. Rozhodněte, které z následujících zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^4 jsou lineární:

$$\begin{aligned}F_0((a, b, c)^T) &= (0, 0, 0, 0) \\F_1((a, b, c)^T) &= (a + b, b + c, a + c, 0) \\F_2((a, b, c)^T) &= (a - b, 0, 1, a) \\F_3((a, b, c)^T) &= (ab, c, a, b) \\F_4((a, b, c)^T) &= (a, c, a, b) \\F_5((a, b, c)^T) &= (a + b + c, a, b, c) \\F_6((a, b, c)^T) &= (a + 2, a - 2, b, c).\end{aligned}$$

Domácí úkoly (tentokrát spíše počítačí)

8.8. Úkol. V prostoru polynomů stupně nejvýše 3 nad \mathbb{R} zjistěte souřadnice vektorů (koeficienty lineární kombinace) $2x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ vzhledem k bázi $\{x^3 + 2x, x^3 + 1, x^2 + x, x + 2\}$. (**3 body**)

8.9. Úkol. Určete dimenzi vektorového prostoru $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ nad tělesem \mathbb{R} a nad tělesem \mathbb{C} .
(3 body)

8.10. Úkol. Spočítejte dimenzi vektorového prostoru $V \cap W$ nad tělesem \mathbb{Z}_5 kde

$$V = \text{span}\{(1, 2, 0, 4), (1, 1, 1, 4)\}, \quad W = \text{span}\{(2, 1, 4, 1), (2, 0, 0, 1)\}$$

nebo

$$V = \text{span}\{(1, 1, 1), (1, 2, 0)\}, \quad W = \text{span}\{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}.$$

(5 bodů)