Cvičení: Lineární algebra I – 16. listopadu 2013

Lineární kombinace/nezávislost

7.1. Poznámka. Připomenutí deifinice lineární kombinace, lineární nezávislosti a lineárního obalu. (Uveden nějaký triviální příklad.)

Dimenze.

7.2. Příklad. Zjistěte, zda se vektor v dá získat jako lineární kombinace vektorů z množiny A nad tělesem T. Kde

1. $v = (5, 2, -3)^T$, $A = \{(4, 1, -2)^T, (1, 1, -1)^T, (3, 4, -1)^T\}$ a $T = \mathbb{R}$,
2. $v = (7, -2, \lambda)^T$, $A = \{(2, 3, 5)^T, (1, -6, 1)^T, (5, 7, 8)^T\}$ a $T = \mathbb{R}$ (v závislosti na $\lambda \in \mathbb{R}$),
3. $v = (i, -1)^T$, $A = \{(1, i)^T, (i, 1 - i)^T\}$ a $T = \mathbb{C}$,
4. $v = (1, 0, 1)^T$, $A = \{(2, 1 - i, 1 + i)^T, (2 + 2i, 1 + 3i, 1 - i)^T, (2, i - 1, 1 + i)^T\}$ a $T = \mathbb{C}$.

7.3. Příklad. Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující množiny lineárně nezávislé (a pokud jsou lineárně závislé, vyjádřete nějaký vektor jako lineární kombinaci ostatních):

1. $\{u, u + v, u + w\}$,
2. $\{u + v, u + w, v + w\}$,
3. $\{u + v, u - v, u + w, u - w\}$,

7.4. Příklad. Dokažte, že vektorový podprostor generovaný dvěma vektory $\mathbb{R}^3$ (tzn. lineární obal těchto vektorů) je buď přímka procházející počátkem, rovina procházející počátkem, nebo pouze počátek.

7.5. Příklad. Ukažte, že pokud $\{v_1, v_2\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů, taková, že vektor v_3 nelze vyjádřit jako lineární kombinace v_1 a v_2, potom také množina $\{v_1, v_2, v_3\}$ je lineárně nezávislá.

Domácí úkoly

7.6. Úkol. Rozhodněte zda je množina vektorů $\{u + v + w, u - w, v - w\}$ lineárně nezávislá, pro u, v, w lineárně nezávislé. **(3 body)**

7.7. Úkol. Ukažte, že každá čtyřprvková množina polynomů stupně nejvýše 2 je lineárně závislá. **(3 body)**

7.8. Úkol. Ukažte, že pokud je množina vektorů $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ lineárně nezávislá, je také jakákoliv podmnožina S také linárně nezávislá. **(3 body)**

7.9. Úkol. Buď W podmnožina vektorového prostoru V nad tělesem T. Potom W je vektorový podprostor V právě tehdy pro všechny $v, w \in W$ a $\alpha \in T$ je také $v + \alpha w \in W$. **(4 body)**