Cvičení: Lineární algebra I – 8. listopadu 2013

6.1. Poznámka. Počítal se další příklad s maticemi nad jinými tělesy než $\mathbb{R}$ z minulého cvičení.

Vektorové prostory

6.2. Poznámka. Okomentování definice vektorových prostorů (sčítání a natahování vektorů) geometricky a rozebrání jejich struktury (přes těleso a komutativní grupu).

6.3. Příklad. Základní vlastnosti vektorových prostorů (přímo z axiomů): Pro vektorový prostor V nad tělesem T:

1. Pro všechny $v \in V$ platí, že $0v = \vec{0}$.
2. Pro všechny $\alpha \in T$ platí, že $\alpha\vec{0} = \vec{0}$.

6.4. Příklad. Ukažte, které z následujících množin (a za jakých předpokladů) tvoří vektorový prostor:

1. Geometrické příklady: čtverec; kruh; $\{(t, 2t, 3t)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$; $\{(2s+t, s-t, 3s+t)^T \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. (jako podprostory $\mathbb{R}^n$)
2. Prostor polynomů nad nějakým tělesem a jeho podprostory: polynomy stupně nejvýše n.
3. Prostor funkcí.

Domácí úkoly

6.5. Úkol. Spočítejte inverzní matici k matici nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ (pokud existuje, pokud neexistuje ukažte, proč)

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2 body)

6.6. Úkol. Ukažte, že přímka v $\mathbb{R}^n$, tzn. $\{u + r \cdot v \mid r \in \mathbb{R}\}$, kde $u, v \in \mathbb{R}^n$, je vektorový prostor právě tehdy když u je nulový vektor nebo $u = r \cdot v$ pro nějaké $r_1 \in \mathbb{R}$.

Podobně rovina v $\mathbb{R}^n$, tzn. $\{u + r \cdot v + s \cdot w \mid r, s \in \mathbb{R}\}$, kde $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, je vektorový prostor právě tehdy když u je nulový vektor nebo $u = r_1 \cdot v + s_1 \cdot w$ pro nějaká $r_1, s_1 \in \mathbb{R}$.

(Poznámka: Neboli, přímka/rovina je vektorový prostor, právě tehdy když prochází bodem $\vec{0} = (0, 0, \cdots, 0)^T$*.)* **(3 body)**

6.7. Úkol. Ukažte další ze základních vlastností vektorových prostorů: Pro vektorový prostor V nad tělesem T:

1. Pro všechny $v \in V$ a všechny $\alpha \in T$ platí, že kdykoliv $\alpha v = \vec{0}$, potom $\alpha = 0$ nebo $v = \vec{0}$.
2. Pro všechny $v \in V$ platí, že opačný vektor k vektoru v je vektor $(-1)v$. (tzn. $v + (-1)v = \vec{0}$)

(4 body)

6.8. Úkol. Spočítejte kolik matic 2×2 nad $\mathbb{Z}_3$ je invertovatelných. **(3 body)**

(Poznámka: Zkuste to nějak aspoň trochu chytřeji. Pokud by jste jen vypsali všechny matice a u každé zvlášť ověřili, jestli je regulární, tak to by bylo za 1.5 bodu.)

6.9. Úkol. Rozhodněte, zda je struktura $(\{0,1,2,3,4,5\},\oplus,\odot)$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_3$, kde $u \oplus v \equiv u+v \mod 6$ a $a \odot u \equiv a \cdot u \mod 6$ ($\cdot$ a $+$ už jsou klasické operace násobení a sčítání čísel). **(4 body)**

6.10. Úkol. Ukažte, že struktura $(\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\},\oplus,\odot)$ nad tělesem $\mathbb{Q}$, kde $r_1 \oplus r_2 = r_1 \cdot r_2$ a $\alpha \odot r = r^\alpha$, je vektorový prostor. **(3 body)**