

Cvičení: Lineární algebra I – 1. listopadu 2013

5.1. Příklad. Ukažte, že následující struktura je těleso:

1. \mathbb{Q} spolu s násobením a sčítáním.
2. \mathbb{C} spolu s násobením a sčítáním.

5.2. Poznámka. Distributivita v \mathbb{Z}_p .

5.3. Poznámka. Hledání inverzních prvků v \mathbb{Z}_p . Malá fermatova věta (tzn. $a^p \equiv a \pmod{p}$).

5.4. Příklad. Řešte soustavu rovnic v $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{11}$:

$$\begin{aligned}x + y + 3z &= a \\ 2x - ay + z &= 1\end{aligned}$$

5.5. Příklad. Spočítejte inverzní matici k matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ v \mathbb{Z}_7 a v \mathbb{Z}_{11} .

5.6. Příklad. Najděte $X \in \mathbb{Z}_3^{2 \times 2}$, resp. $\mathbb{Z}_5^{2 \times 2}$, tak aby platilo, že $(A - X)B = I_n$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.7. Poznámka. Šifrování s více klíči.

Domácí úkoly

5.8. Úkol. Najděte komutativní těleso, které má právě 4 prvky. Dokažte, že je to těleso dle definice tělesa. **(3 body)**

5.9. Úkol. Ukažte, že $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ spolu s operacemi sčítání a násobením tvoří těleso. **(2 body)**

5.10. Úkol. Rozhodněte, zda množina regulárních matic typu $n \times n$ spolu s operacemi maticového sčítání a násobení tvoří těleso. **(3 body)**