# Cvičení: Lineární algebra I – 25. října 2013

## *Grupy*

**4.1. Příklad.** Rozhodněte, které z následujících struktur jsou grupy:

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, *)$, $(\mathbb{Q}, *)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, -)$
2. $(\mathbb{R}^n, +)$, $(\{\text{matice typu } n \times n\}, +)$, $(\{\text{matice typu } n \times n\}, \cdot)$, $(\{\text{regulární matice typu } n \times n\}, \cdot)$ (zde $+$ a $\cdot$ je maticé sčítání a násobení)
3. $(\mathbb{Z}_3, +_{\text{mod } n})$, $(\mathbb{Z}_6, +_{\text{mod } n})$, $(\mathbb{Z}_8, *_{\text{mod } n})$, $(\mathbb{Z}_6, *_{\text{mod } n})$, $(\mathbb{Z}_n, +_{\text{mod } n})$, $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, *_{\text{mod } n})$ (pro které $n$ není), $(2\mathbb{Z}, +)$

Kde

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_n &:= \{0, 1, \ldots, n-1\}, \\
n\mathbb{Z} &:= \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}, \\
a +_{\text{mod } n} b &:= \text{zbytek po vydělení čísla } a + b \text{ číslem } n, \\
a *_{\text{mod } n} b &:= \text{zbytek po vydělení čísla } a * b \text{ číslem } n.
\end{aligned}$$

**4.2. Příklad.** Nechť

$$\begin{aligned}
A &= \{(t, 2t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
B &= \{(t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Potom $(A, +)$ a $(\{a + b \mid a \in A, b \in B\}, +)$ jsou grupy.

## *Permutace*

**Poznámka.** Cvičili jsme: Jak se skládají permutace, tři druhy zápisů permutací. Že permutace tvoří grupu.

## *Domácí úkoly*

**4.3. Úkol.** Ukažte, že množina matic splňujících $AA^T = I_n$ s operací násobení matic je grupa. **(3 body)**

**4.4. Úkol.** Ukažte, že množina (reálných) polynomů o jedné proměnné s operací sčítání polynomů tvoří grupu. **(2 body)**

Ukažte naopak, že pokud místo operace sčítání je operace násobení, tak grupu netvoří. *(Hint: Najděte nějaký jednoduchý polynom, ke kterému neexistuje inverzní polynom.)* **(3 body)**

**4.5. Úkol.** Každá permutace jde získat složením transpozic t.j. permutací obsahující pouze prohození dvou prvků a zachovávající ostatní prvky na místě. **(4 bodů)**

*Hint: Ukažte to nejdřív pro permutaci, která obsahuje jeden cyklus.*