Cvičení: Lineární algebra I – 20. prosince 2013

12.1. Poznámka. V testu se objeví:

1. Počítání matice přechodu od báze k bázi.
2. Počítání jádra lineárního zobrazení a dimenze jádra a obrazu lineárního zobrazení.
3. Rozhodnout jestli je zobrazení skalární součin resp. norma., určit jestli jsou zadané dva vektory kolmé pomocí skalárního součinu.

Duální prostory

12.2. Poznámka. Definice duálního prostoru a ukázka jak vypadá pro konečně dimenzionální vektorový prostor.

1. V = prostor všech posloupností $(a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ takových, že $\lim_i a_i \in \mathbb{R}$ resp. $\sum_i a_i \in \mathbb{R}$. Pak lineární zobrazení $(a_i)_i \mapsto \lim_i a_i$ resp. $(a_i)_i \mapsto \sum_i a_i$ jsou prvky V^*.
2. Pro $x \in [0,1]$. Nechť $\delta_x \colon \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ je taková, že $\delta_x \colon f \mapsto f(x)$. Pak $\delta_x \in \mathcal{C}([0,1])^*$.
3. $T \colon f \mapsto \int_0^1 f \mathrm{d}x$ je také prvkem $\mathcal{C}([0,1])^*$.
4. $\mathrm{tr} \in \mathcal{M}_n(T)^*$
5. $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \mapsto \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}$ je prvkem $\mathcal{M}_n(T)^*$.

Kde

$$\mathcal{C}([0,1]) = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ spojité}\}$$
$$\mathcal{M}_n(T) = \{M \mid M \text{ je matice } n \times n \text{ nad tělesem } T\}$$

Skalární součin a norma

12.3. Poznámka. Definice skalárního součinu a normy pro $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

12.4. Příklad. Rozhodněte zda zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ je skalární součin

1. $\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3$
2. $\langle u, v\rangle = x_1y_1x_2y_2$
3. $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + 3x_2y_2$
4. $\langle u, v\rangle = x_1y_2 - x_2y_1$
5. $\langle u, v\rangle = 4x_1y_1 + 4x_2y_2 - x_1x_2 - x_2y_1$
6. $\langle u, v\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$

12.5. Příklad. Nakreslete množinu vektorů $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$, kde

1. $\|x\| = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$
2. $\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
3. $\|x\| = \|x\|_\infty = \max_{i=1,2} |x_i|$

12.6. Poznámka. Pro $V = \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ a skalární součin $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Je množina funkcí $\{1, \sin nx, \cos nx\}$ pro $n = 1, 2 \dots$ ortogonální systém.

Domácí úkoly

12.7. Úkol. Pro komplexní normu $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1\vec{y_1} + x_2\vec{y_2}$ určete $k \in \mathbb{C}$ takové, že vektory $(k, 1+i)$ a $(3-i, 2)$ jsou kolmé. **(2 body)**

12.8. Úkol. Ukažte, že pro konečně dimenzionální vektorový prostor V je V izomorfní V^* (dělali jsme na cvičení, úkolem je pečlivě to sepsat). **(3 body)**

12.9. Úkol. Pro vektorový prostor V takový, že $\dim V = n$ dokažte, že $\dim V^* = n$, kde V^* je duální prostor k V.

(Pozn.: V kontextu předchozích úkolů je tento velmi lehký, napište proto všechna zdůvodnění co nejpečlivěji.) **(2 body)**

12.10. Úkol. Ukažte, že $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ definované pro $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, je skalární součin. **(4 body)**

12.11. Úkol. Ukažte, že $\|x\|_3 = \sqrt[3]{|x_1|^3 + |x_2|^3}$ je norma. **(3 body)**