Cvičení: Lineární algebra I – 6. prosince 2013

Matice přechodu

10.1. Poznámka. Vysvětlení matice přechodu, značení zápisu souřadnic vzhledem k bázi.

10.2. Příklad. Najděte matici přechodu od báze B k bázi B' nad tělesem $\mathbb{R}$ a určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B'. Kde

1. $$B = \text{ kanonická}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. $$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. $$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. $$B = \{u_1, u_2\}, \quad B' = \{2u_1 + 5u_2, u_1 + 3u_2\}, \quad T = \mathbb{Z}_7, [x]_B = (2,3)^T.$$

Vlastnosti lineárních zobrazení

10.3. Poznámka. Kernel, Image. Kernel $= \{0\}$ iff zobrazení je prosté.

Domácí úkoly

10.4. Úkol. Najděte jádro a obraz lineárního zobrazení a určete jejich dimenzi pro lineární zobrazení zadané maticí s parametru a (nad tělesem $\mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

(3 body)

10.5. Úkol. Rozhodněte, zda následující matice může být maticí přechodu $\mathbb{R}^4$ pro vhodné báze:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ -7 & 9 & 13 & 14 \end{pmatrix}.$$

(3 body)

10.6. Úkol. Nechť V je vektorový prostor a $F\colon V \to \mathbb{R}$ lineární zobrazení. Nechť W je jádro zobrazení F.

Pokud $W \neq V$ a $v_0 \in V \setminus W$, pak každý prvek V je lze také zapsat jako $w + cv_0$ pro nějaké $w \in W$ a nějaké c.

(5 bodů)