Příklady z Lineární algebry III.

(Milan Hladík, 12. ledna 2018)

1 SVD rozklad

1.1 Určete singulární čísla matic:

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $a = (a_1, \dots, a_n)^T$,

(c) positivně definitní matice s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1.2 Určete SVD rozklad matice $A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$.

1.3 Ukažte, že matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má nulové singulární číslo právě tehdy, když má nulové vlastní číslo.

1.4 Nechť všechna singulární čísla matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou stejná. Ukažte, že A je násobek ortogonální matice.

1.5 Nechť regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má singulární čísla $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$. Najděte singulární čísla matic A^T, A^{-1} a $\operatorname{adj}(A)$.

1.6 *Polární rozklad* matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je rozklad $A = PQ$, kde P je positivně semidefinitní a Q ortogonální.

(a) Ukažte, že každá matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má polární rozklad.

(b) Ukažte, že matice P je jednoznačně určená tak, že vyjádříte $P = \sqrt{AA^T}$.

(c) Najděte polární rozklad matice $a \in \mathbb{R}^n$.

2 Pseudoinverze

2.1 Určete psudoinverzi matice

(a) $A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$.

2.2 Dokažte:

(a) $AA^\dagger$ je symetrická,

(b) $A = (A^\dagger)^T A^T A$,

2.3 Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ a pro soustavu $Ax = b$ ukažte, že

(a) má aspoň jedno řešení právě tehdy, když $AA^\dagger b = b$,

(b) má nanejvýš jedno řešení právě tehdy, když $AA^\dagger = I_n$,

(c) má-li aspoň jedno řešení, pak všechna řešení jsou vyjádřit jako $A^\dagger b + y - A^\dagger Ay$, kde $y \in \mathbb{R}^n$ je libovolné.

2.4 Dokažte zbylé vlastnosti věty o Drazinově pseudoinverzi.

3 Maticová norma

3.1 Dokažte, že pro P matici projekce do netriviálního vlastního podprostoru platí $\|P\|_2 = \|I - P\|_2$.

3.2 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$ a ukažte, že meze nelze zlepšit (tj., jsou těsné pro určité matice).

3.3 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární a λ její vlastní číslo. Dokažte $\|A^{-1}\|_2^{-1} \leq |\lambda| \leq \|A\|_2$.

3.4 Rozhodněte, pro které ze zmiňovaných norem platí $\|\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)\| = \max\{\|A\|, \|B\|\}$.

3.5 Ukažte, že $\|A^T A\|_2 = \|A\|_2^2$, ale obecně $\|A^2\|_2 \neq \|A\|_2^2$.

3.6 Dokažte, že $\|I_n\| = 1$ pro každou indukovanou maticovou normu. Dále spočítejte $\|I_n\|_F$, $\|I_n\|_{\ell_1}$ a $\|I_n\|_{\ell'_\infty}$, což prokáže, že tyto normy nejsou indukované žádnou vektorovou normou.

3.7 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte, že ze všech symetrických matic je matice $\frac{1}{2}(A + A^T)$ nejblíže k matici A ve Frobeniově a maticové 2-normě.

3.8 Buď matice A tvaru $A = I_n - N$, kde $N \geq 0$ a $\rho(N) < 1$.

(a) Dokažte $A^{-1} \geq 0$.

(b) Dokažte, že existuje $x > 0$ takové, že $Ax > 0$.

(c) Dokažte, že reálné části vlastních čísel matice A jsou kladné.

(d) Dokažte $\det(A) > 0$.

4 Číslo podmíněnosti

4.1 Spočítejte číslo podmíněnosti ortogonální matice ve Frobeniově normě.

4.2 Určete, jaký je vztah mezi $k_1(A)$ a $k_2(A)$. Pro které matice nastává rovnost?

4.3 Odhadněte chybu při výpočtu A^{-1} analogicky jako jsme to dělali pro řešení soustavy lineárních rovnic.

5 Perturbace

5.1 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická a taková, že $A^k \to_{k\to\infty} 0$. Určete co největší $\delta > 0$ takové, že matice bude splňovat podmínku $A^k \to_{k\to\infty} 0$ i když libovolné prvky matice nezávisle zperturbujeme až o hodnotu δ (se zachováním symetrie matice).

5.2 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární. Je zobrazení $A \mapsto A^{-1}$ spojité na nějakém okolí matice A?

5.3 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Určete matici $\det(A)'$, jejíž (i,j)-prvek je $\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}}$. (*Hint:* Laplaceův rozvoj determinantu.)

5.4 Spočítejte:

(a) $\frac{\partial \operatorname{trace}(A)}{\partial A}$,

(b) $\frac{\partial x^T A x}{\partial x}$,

(c) $\frac{\partial Ax}{\partial x}$,

(d) $\frac{\partial \|A\|_F^2}{\partial A}$.

6 Nezáporné matice

6.1 Určete spektrální poloměr latinského čtverce velikosti $n \times n$.

6.2 Buď $A \geq 0$. Ukažte, že $\rho(A) \geq \min_i\{a_{ii}\}$.

6.3 Buď $0 \leq A < B$. Ukažte, že $\rho(A) < \rho(B)$.

6.4 Buď $A < 0$. Rozhodněte zda platí:

(a) $\rho(A)$ se nabyde jako vlastní číslo,

(b) vlastní vektor, odpovídající dominantnímu vlastnímu číslu, je kladný,

6.5 Ukažte, že pokud $0 \leq A \leq B$, pak pro spektrální normu platí $\|A\|_2 \leq \|B\|_2$.

6.6 Buď $A < 0$ a označme $\alpha := \rho(A)$. Ukažte, že limitní matice $\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{\alpha}A)^k$ existuje a má hodnost 1.

7 Maticové funkce

7.1 Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a analytickou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ukažte

(a) $f(A^T) = f(A)^T$,

(b) $f(A)$ komutuje s A,

7.2 Určete e^A pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pokud:

(a) $A = 0$,

(b) $A^2 = 0$,

(c) $A^2 = A$.

7.3 Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dokažte:

(a) e^A je regulární,

(b) je-li A symetrická, pak e^A je positivně definitní,

(c) je-li $A = -A^T$, pak e^A je ortogonální.

7.4 Najděte explicitní vyjádření pro e^A, kde $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

8 Kroneckerův součin

8.1 Pro vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ vyjádřete $x \otimes y^T$.

8.2 Ukažte pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

(a) $(A \otimes I_m)^k = A^k \otimes I_m$,

(b) $e^{A\otimes I_m} = e^A \otimes e^{I_m}$,

8.3 Kdy všude platí $A \otimes B = I_n$?

8.4 Ukažte:

(a) $\|A \otimes B\| = \|A\| \cdot \|B\|$ pro maticové ℓ_p normy $\|\cdot\|_{\ell_p}$ a indukované 1- a ∞-normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_\infty$,

(b) $\|A \otimes I_m + I_m \otimes B\| \leq \|A\| + \|B\|$ pro maticové ℓ_1 a ℓ_∞ normy a indukované 1- a ∞-normy.

9 Hadamardův součin. Positivní semidefinitnost

9.1 Pro $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární dokažte $(A^{-T} \circ A)e = e$.

9.2 Pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ukažte $\|A \circ B\|_F \leq \|A\|_F \cdot \|B\|_F$.

9.3 Dokažte pro relaci $\succeq$ a Hadamardův součin:

(a) $A \succeq B,\ C \succeq 0 \ \Rightarrow\ A \circ C \succeq B \circ C$,

(b) $A \succeq B \succeq 0,\ C \succeq D \succeq 0 \ \Rightarrow\ A \circ C \succeq B \circ D \succeq 0$,

9.4 Připomeňme, že pro každý vektor $x \in \mathbb{R}^n$ je $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Odvoďte odhad pro determinant $\det(B) \leq \prod_{i=1}^n \|B_{*i}\|_1$ na základě Gerschgorinových disků a ukažte, že je méně těsný, než ten z Hadamardovy nerovnosti. Ukažte dále, že ještě těsnější odhad $\det(B) \leq \prod_{i=1}^n \|B_{*i}\|_\infty$ již obecně neplatí.

10 M-matice

10.1 Ukažte, že hlavní podmatice M-matice jsou M-matice.

10.2 Rozhodněte, zda jsou (a případně za jakých podmínek jsou) M-matice uzavřené na:

(a) součet,

(b) součin.

10.3 Nechť A je M-maticí, $B \geq A$, $b_{ij} \leq 0$ pro $i \neq j$. Dokažte:

(a) B je M-maticí,

(b) $A^{-1} \geq B^{-1}$.

10.4 Ukažte, že Jacobiho metoda konverguje pokud je A diagonálně dominantní, tj. $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$.

10.5 Ukažte přímo, že problém lineární komplementarity má jednoznačné řešení a najděte jeho vyjádření pro případ, když A je M-matice a $b \leq 0$.