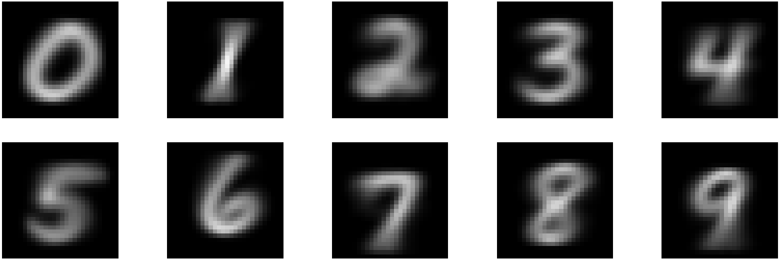
Slajdy k přednášce Lineární algebra II

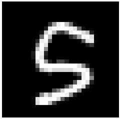
Milan Hladík

Katedra Aplikované Matematiky,
Matematicko-fyzikální fakulta,
Univerzita Karlova v Praze,
http://kam.mff.cuni.cz/~hladik

14. února 2017

Vzdálenost a klasifikace číslic



Chceme klasifikovat: 

Jednotlivé vzdálenosti:

0: 1957.44	1: 2237.30	2: 2015.79	3: 1816.23	4: 1868.78
5: 1771.64	6: 2038.57	7: 2090.51	8: 1843.22	9: 1900.81

Klasifikujeme jako 5 (ale je blízko také číslu 3).

Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x$ na $\langle -\pi, \pi \rangle$

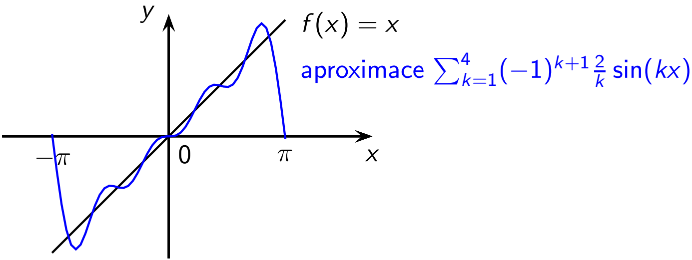
Fourierův rozvoj $x = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx))$, kde:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot 1 \; dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \; dx = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx) \; dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx) \; dx = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx) \; dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx) \; dx = 0.$$

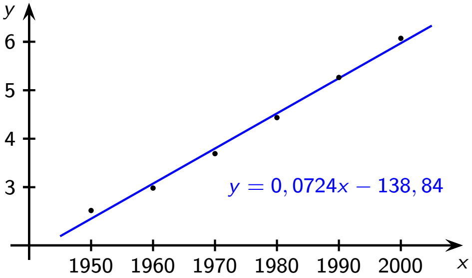
Tedy $x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin(kx)$.



Lineární regrese: vývoj světové populace

rok	1950	1960	1970	1980	1990	2000
populace (mld.)	2,519	2,982	3,692	4,435	5,263	6,070

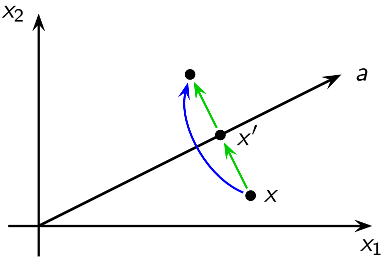
Proložení přímkou $y = px + q$:
$$\begin{aligned} 2,519 &= p \cdot 1950 + q \\ &\vdots \\ 6,070 &= p \cdot 2000 + q \end{aligned}$$




```
A=[1950 1960 1970
   1980 1990 2000;
   1 1 1 1 1 1 ]';
b=[2.519 2.982
   3.692 4.435
   5.263 6.070]';
x=inv(A'*A)*A'*b,
x'*[2009; 1]
```

Odhad pro rok 2009: 6,622 mld., skutečnost : 6,793 mld.

Ortogonální matice: otočení dle osy o 180°



Otočení bodu x kolem osy o 180° ve směru a:

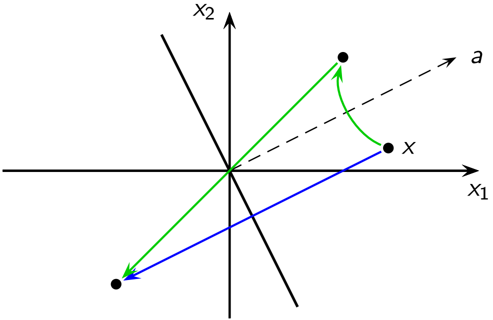
$$x + 2(x' - x) = 2x' - x = 2a(a^T a)^{-1} a^T x - x = \left(2\frac{aa^T}{a^T a} - I\right) x$$

Tedy matice otočení:

$$2\frac{aa^T}{a^T a} - I.$$

Ortogonální matice: Householderova transformace

Householderovo zrcadlení dle nadroviny s normálou a:



Nejprve otočíme o 180° dle a, a pak překlopíme dle počátku:

$$I - 2\frac{aa^T}{a^Ta}.$$

Výpočet deteminantu z definice

1. Matice řádu 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

2. Matice řádu 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{array}$$

Mnemotechnicky (Sarrusovo pravidlo, pouze pro matice řádu 3):

$$\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right)$$

Výpočet deteminantu pomocí elementárních úprav

Př.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 \end{vmatrix} = 5$$

Laplaceův rozvoj determinantu

Př.: Laplaceův rozvoj determinantu dle 4. řádku

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{4+3} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = 8$$

Cramerovo pravidlo

Př.: Řešte soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

Řešení:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{4}{2} = 2,\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{2}{2} = 1,\ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{2} = -1,$$

Adjungovaná matice

Př.: Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pak:

$$\mathrm{adj}(A)_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5, \ \ldots$$

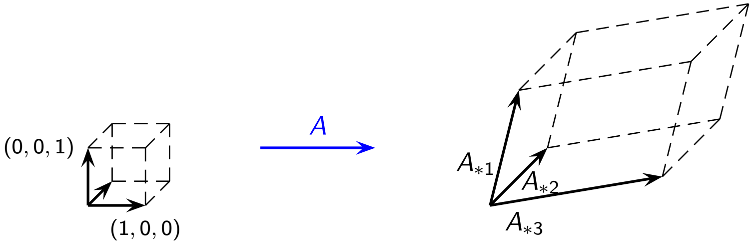
Celkem:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poznámka:

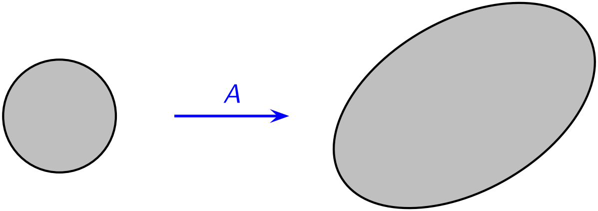
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geometrická interpretace determinantu



objem $= 1$ objem $= |\det(A)|$

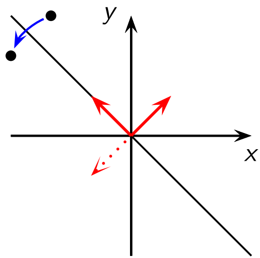
Geometrická interpretace determinantu (pokr.)



objem $= V$

objem $= |\det(A)| \cdot V$

Vlastní čísla lineárních zobrazení v rovině

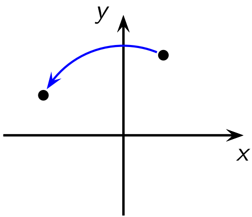


Překlopení dle přímky $y = -x$,

matice zobrazení $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

vlastní čísla:

- 1, vlastní vektor $(-1, 1)^T$
- -1, vlastní vektor $(1, 1)^T$



Rotace o úhel 90°,

matice zobrazení $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

žádná reálná vlastní čísla.

Výpočet vlastních čísel pomocí charakteristického polynomu

Př.:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Kořeny polynomu, a tedy vlastními čísly matice A, jsou $\pm i$.

Lineární deformace obrázku

Mějme matici $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.75 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vlastní čísla a vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1.5,\ x_1 = (1,0)^T, \quad \lambda_2 = 1,\ x_2 = (0,1)^T$$

Zobrazení $x \mapsto Ax$ představuje skosení a protáhnutí v ose x_1 o 50%.

původní obrázek

obrázek po transformaci

Geometrická interpretace diagonalizace

transformace do jiného souřadného systému

Př.:

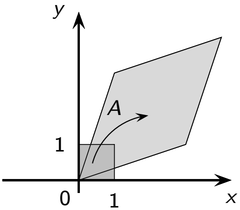
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

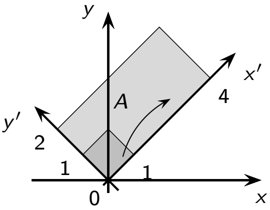
Vlastní čísla a vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 4,\; x_1 = (1,1)^T, \quad \lambda_2 = 2,\; x_2 = (-1,1)^T$$

Diagonalizace:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$





Jordanova normální forma

Př.:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Jordanova normální forma matice A:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Soustava lineárních diferenciálních rovnic

Homogenní soustava lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními keoficienty:

$$u(t)' = Au(t),$$

kde $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ je neznámá funkce a $u(t_0) = u_0$ počáteční podmínka.

Hledáme řešení ve tvaru $u(t)_i = v_i e^{\lambda t}$, kde v_i, λ jsou neznámé.

Dosazením:

$$\lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A v, \quad \text{neboli} \quad \lambda v = Av.$$

Vede na výpočet vlastních čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a vektorů $x_1, \ldots, x_n$.

Řešení je $u(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} x_i$, kde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (získá se z poč. podm.).

Soustava lineárních diferenciálních rovnic, příklad

Př.:

$$u_1' = 7u_1 - 4u_2$$
$$u_2' = 5u_1 - 2u_2$$

Matice $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla:

- 2, vlastní vektor $(4, 5)^T$,
- 3, vlastní vektor $(1, 1)^T$.

Řešení úlohy jsou tvaru

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = a \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Markovovy řetězce

Př.: Migrace obyvatel USA město–předměstí–venkov:

z města:	96% zůstane, 3% do předměstí, 1% na venkov
z předměstí:	1% do města, 98% zůstane, 1% na venkov
z venkova:	1.5% do města, 0.5% do předměstí, 98% zůstane

Počáteční stav: 58 mil. ve městě, 142 mil. předměstí, 60 mil. venkov.
Jak se bude vyvíjet v čase?

$$A := \begin{pmatrix} 0.96 & 0.01 & 0.015 \\ 0.03 & 0.98 & 0.005 \\ 0.01 & 0.01 & 0.98 \end{pmatrix}, \quad x_0 = (58, 142, 60)^T.$$

Vývoj v čase: Ax_0, A^2x_0, A^3x_0, $\ldots$, $A^\infty x_0$.

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97 \end{pmatrix} Q^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^\infty = \begin{pmatrix} 0.23 & 0.23 & 0.23 \\ 0.43 & 0.43 & 0.43 \\ 0.33 & 0.33 & 0.33 \end{pmatrix}.$$

Tedy 23% ve městě, 43% předměstí, 33% venkov.

Vlastní čísla: mocninná metoda

Př.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = (1, 0, 1)^T.$$

Výpočet:

i	x_i	$x_{i-1}^T y_i$
0	$(1.00, 0.00, 1.00)^T$	–
1	$(0.67, 1.00, 0.17)^T$	5
2	$(1.00, 0.88, 0.56)^T$	6.32
3	$(0.97, 1.00, 0.47)^T$	6.94
4	$(1.00, 1.00, 0.50)^T$	7

```
A=[2 4 2; 4 2 2;
   2 2 -1];
x=[1;0;1];
for i=1:4
  y=A*x;
  (y'*x),
  x=y/norm(y);
  x/max(abs(x)),
end
```

Vyhledávač Google™ a PageRank

$$
\begin{aligned}
&N \text{ webových stránek}\\
&a_{ij} = \begin{cases} 1 & j\text{-tá stránka odkazuje na } i\text{-tou}\\ 0 & \text{jinak} \end{cases}\\
&b_j = \text{počet odkazů z } j\text{-té stránky}\\
&x_i = \text{důležitost } i\text{-té stránky}
\end{aligned}
$$

Řešíme $x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{b_j} x_j$, $i = 1, \ldots, N$.

Maticově $A'x = x$, kde $a'_{ij} := \frac{a_{ij}}{b_j}$. Tedy x je vlastní vektor k 1.

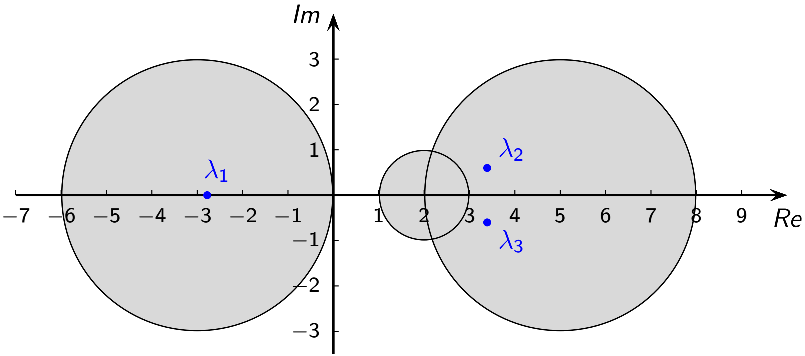
Příklady Page ranku:

`www.google.com`	10
`www.cuni.cz`	8
`www.mff.cuni.cz`	7
`kam.mff.cuni.cz`	6
`kam.mff.cuni.cz/~hladik`	4

Gerschgorinovy disky

Př.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{vlastní čísla:} \ -2.78,\ 3.39 \pm 0.6\, i$$



Choleského rozklad $A = LL^T$

Př.: Počítáme prvky L od prvního sloupce shora

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Bilineární a kvadratické formy

<u>Př.</u>: nesymetrická bilineární forma na $\mathbb{R}^2$

$$b(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + 10x_2y_2.$$

Maticové vyjádření formy:

$$b(x,y) = x^TAy = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

<u>Př.</u>: symetrická bilineární forma na $\mathbb{R}^2$

$$b'(x,y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 10x_2y_2.$$

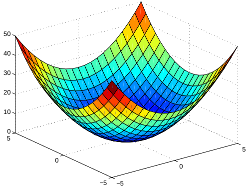
Maticové vyjádření formy:

$$b'(x,y) = x^TA'y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

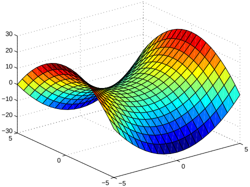
Odpovídající kvadratická forma:

$$f'(x) = b'(x,x) = x^TA'x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

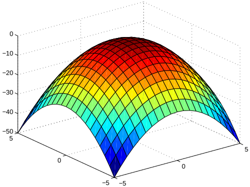
Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$



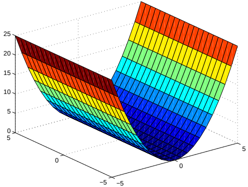
$x_1^2 + x_2^2$



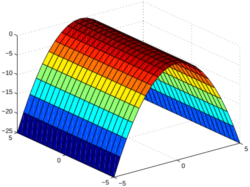
$x_1^2 - x_2^2$



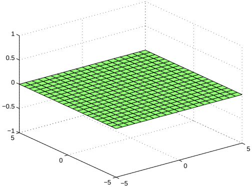
$-x_1^2 - x_2^2$



x_1^2



$-x_1^2$



0

Diagonalizace kvadratické formy

Př.:

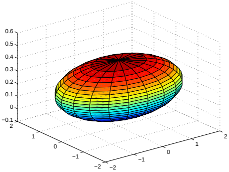
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

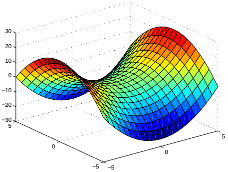
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Závěr: matice je positivně semidefinitní.

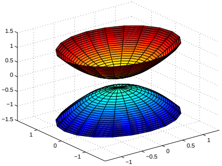
Kvadriky v $\mathbb{R}^3$



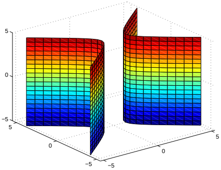
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$



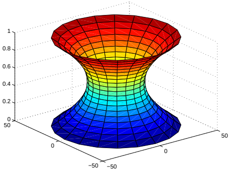
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3 = 0$$



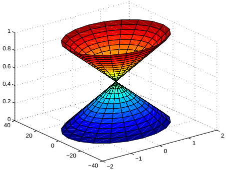
$$-\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$



$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$



$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$$

… a jiné

Top 10 algoritmy 20. století

[J. Dongarra a F. Sullivan, “The Top Ten Algorithms of the Century”, Computing in Science and Engineering, 2000.]

1. Metoda Monte Carlo (1946, J. von Neumann, S. Ulam, and N. Metropolis)
2. Simplexová metoda pro lineární programování (1946, G. Dantzig)
3. Iterační metody Krylovových podprostorů (1950, M. Hestenes, E. Stiefel, C. Lanczos)
4. Dekompozice matic (1951, A. Householder)
5. Překladač Fortranu (1957, J. Backus)
6. QR algoritmus pro výpočet vlastních čísel, (1961, J. Francis)
7. Quicksort (1962, A. Hoare)
8. Rychlá Fourierova transformace (1965, J. Cooley, J. Tukey)
9. Integer relation detection algorithm (1977, H. Ferguson, R. Forcade)
10. Fast multipole algorithm (1987, L. Greengard, V. Rokhlin)

QR rozklad

Vstup: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Algoritmus:

$Q := I_m$; $R := A$
for $j := 1 : \min(m, n)$ **do**
  $x = R(j : m, j)$
  if $x \neq \|x\|_2 e_1$
    $x := x - \|x\|_2 e_1$
    $H(x) := I_{m-j+1} - \frac{2}{x^T x} x x^T$
    $H := \begin{pmatrix} I_{j-1} & 0 \\ 0 & H(x) \end{pmatrix}$
    $R := HR$; $Q := QH$
  end
end

Výstup: $A = QR$

QR rozklad – příklad

Př.:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

První iterace:

$$u_1 = A_{*,1} - \|A_{*,1}\| e_1 = (-5, 3, 4)^T,$$

$$Q_1 = I_3 - 2\frac{u_1 u_1^T}{u_1^T u_1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 15 & 20 \\ 15 & 16 & -12 \\ 20 & -12 & 9 \end{pmatrix}, \quad Q_1 A = \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & -25 & -10 \end{pmatrix}.$$

Druhá iterace:

$$u_2 = (0, -25)^T - 25e_1 = (-25, -25)^T,$$

$$Q_2 = I_2 - 2\frac{u_2 u_2^T}{u_2^T u_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -25 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Výsledek:

$$Q = Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & -20 & -15 \\ 15 & 12 & -16 \\ 20 & -9 & 12 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

QR algoritmus – příklad

Př.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6.1667 & -2.4623 & 0.8616 \\ -2.4623 & -1.2576 & -0.2598 \\ 0.8616 & -0.2598 & -1.9091 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 6.9257 & 0.7725 & 0.2586 \\ 0.7725 & -1.9331 & 0.0224 \\ 0.2586 & 0.0224 & -1.9925 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6.9939 & -0.2225 & 0.0742 \\ -0.2225 & -1.9945 & -0.0018 \\ 0.0742 & -0.0018 & -1.9994 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 6.9995 & 0.0636 & 0.0212 \\ 0.0636 & -1.9996 & 0.0001 \\ 0.0212 & 0.0001 & -1.9999 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & -0.0182 & 0.0061 \\ -0.0182 & -2 & -10^{-5} \\ 0.0061 & -10^{-5} & -2 \end{pmatrix}$$

```
A=[2 4 2; 4 2 2; 2 2 -1];
for i=1:5
  [Q,R]=qr(A);
  A=R*Q,
end
```

SVD rozklad – příklad

Př.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$AA^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix},$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

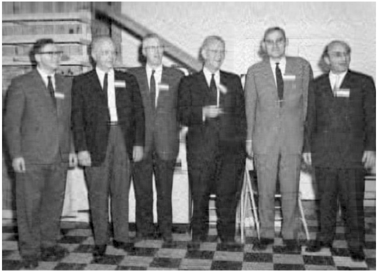
Závěr:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

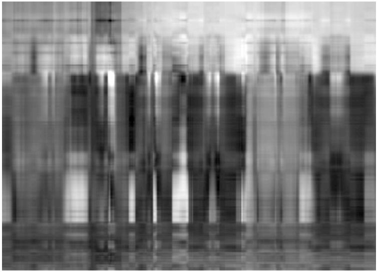
SVD – komprese obrazu (1)

originál ($k = 480$)

$k = 150$



$k = 50$



$k = 5$

SVD – komprese obrazu (2)

- Foto z konference o numerické algebře v Gatlinburgu, 1964.
- 480×640 pixelů.
- SVD rozklad za cca 5 sec (11.5.2010).
- Zleva: James H. Wilkinson, Wallace Givens, George Forsythe, Alston Householder, Peter Henrici, and Fritz Bauer.

```
load gatlin,
[X,S,Y] = svd(X);
figure(2), clf,
k = 150;
Xk = X(:,1:k)*S(1:k,1:k)*Y(:,1:k)';
image(Xk),
colormap(map),
axis equal, axis off,
```