Domácí úkoly z Lineární algebry 2

(12. května 2023)

Úkol 1. Na prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme skalární součin $\langle x, y\rangle = [x]_B^T[y]_B$, kde báze B má tvar $B = \{(1,2)^T, (1,1)^T\}$.

- Najděte explicitní vyjádření pro $\langle x, y\rangle$. **6**
- V tomto skalárním součinu najděte nenulový vektor kolmý na $x = (2,1)^T$. **4**

Úkol 2. Buď $a \in \mathbb{R}^n$ pevný vektor. Určete maximální hodnotu lineární funkce $f(x) = a^T x$ na jednotkovém kruhu $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$ pro p-normy postupně s $p \in \{1, 2, \infty\}$. To znamená, najděte takový bod na jednotkovém kruhu, který má největší hodnotu funkce $f(x)$. **10**

Úkol 3. Slunce zrovna vycházelo nad hory, když šíp vystřelený starým indiánem kmene Apačů protnul sluneční kotouč a stín šípu se promítnul na starou bizoní kůži. Určete (pomocí projekce), kolikrát byl stín menší než vlastní šíp, pokud víme, že slunce se nacházelo ve směru vektoru $(3,2,1)^T$, šíp byl vystřelený z bodu $(1,2,3)^T$ po přímce se směrnicí $(5,5,5)^T$ a bizoní kůže se sušila kolmo na sluneční paprsky. **10**

Úkol 4. Vývoj epidemie LAVID-23 (linear algebraic virus disease) probíhal v týdenních přírůstcích dle tabulky

týden	1	2	3	4	5	6	7
případy	245	447	752	1167	1673	2214	2704

(a) Víme, že vývoj epidemie (denní přírůstky) se řídí vztahem $f(x) = e^{ax^2+bx+c}$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou neznámé parametry. Odhadněte parametry metodou nejmenších čtverců.

(b) Zjistěte, jaký bude očekávaný maximální přírůstek.

(c) Zjistěte, za jak dlouho bude přírůstek pod hodnotou 100.

10

Úkol 5. Spočítejte následující determinant matice řádu n s parametry:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$ **10**

Úkol 6. Určete objem elipsoidu vzniknuvšího obrazem jednotkové koule při lineárním zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definovaném

$$f(1,3,1) = (2,3,1),\ f(1,0,3) = (1,1,2),\ f(1,1,1) = (0,2,3).$$ **10**

Úkol 7. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice řádu n

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Hint: nechoďte na to přes charakteristický polynom. **10**

Úkol 8. S využitím diagonalizace odvoďte explicitní předpis pro $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{smallmatrix}\right)^k$. **10**

Úkol 9. Uvažujme webovou síť se stránkami A, B, C, D, E, F a linky:

A odkazuje na B, C
B odkazuje na E
C odkazuje na A, B, E
D odkazuje na E, F
E odkazuje na F
F odkazuje na C, D

Navrhněte vhodný page rank a ohodnoťte stránky podle něj. K numerickému výpočtu můžete použít software dle vlastního uvážení. **10**

Úkol 10. Dokažte, že symetrická matice v blokovém tvaru $\left(\begin{smallmatrix} A & B^T \\ B & C \end{smallmatrix}\right)$ je positivně definitní právě tehdy, když obě matice A a $C - BA^{-1}B^T$ jsou positivně definitní. (Jedná se vlastně o zobecnění rekurentního vzorečku.) **10**

Úkol 11. Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n\times n}$ definujme relace $\prec$ a $\preceq$ předpisem $A \prec B$ pokud $B - A$ je positivně definitní a $A \preceq B$ pokud $B - A$ je positivně semidefinitní.

(a) Ukažte, že $\preceq$ je relace částečného uspořádání. **3**

(b) Nechť $0 \prec A$. Rozhodněte, zda $0 \prec A^{-1}$. **2**

(c) Nechť $A \preceq B$. Rozhodněte, zda $U^T AU \preceq U^T BU$ pro každou matici $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$. **2**

(d) Nechť $0 \preceq A \preceq B$. Rozhodněte, zda $A^2 \preceq B^2$. **3**

Úkol 12. Ukažte, že rovnice $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$ popisuje elipsu v $\mathbb{R}^2$ a pomocí vlastních čísel a vektorů zjistěte její charakteristiky (délku a směr poloos). **10**