Příklady z Intervalových metod

(Milan Hladík, 4. ledna 2018)

Na zápočet potřeba aspoň $\frac{1}{3}$ bodů z každé série, na zkoušku aspoň $\frac{2}{3}$. Po termínu odevzdání se bodové ohodnocení krátí o čtvrtinu.

A Intervalová aritmetika a obraz funkce [termín odevzdání: 16.11.2017]

1. Uvažujme rekurzivní rovnici $x_n = x_{n-1}^2, n = 1, 2, \ldots$, kde $x_0 = 1 - 10^{-21}$. Hledáme hodnotu x_{75}. Použitím 10 místné aritmetiky dosáhneme výsledku $x_0 = x_1 = \ldots = 1$. Nicméně přesná hodnota splňuje $x_{75} < 10^{-10}$. Dokažte. **10**

2. Dokažte následující vlastnosti intervalové aritmetiky pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{IR}$
   - $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}$, **4**
   - $\boldsymbol{x} = x_c + x_\Delta[-1, 1]$. **4**

3. Pro matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ a $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$:
   - ukažte, že $B(\boldsymbol{A}C) = (B\boldsymbol{A})C$, **4**
   - najděte vztah mezi intervalovými maticemi $\boldsymbol{A}(BC)$ a $(\boldsymbol{A}B)C$. **4**

4. Pro $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ a jejich součin $\boldsymbol{C} := \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ dokažte
$$\boldsymbol{C} = \square\{AB;\ A \in \boldsymbol{A}, B \in \boldsymbol{B}\}$$
   a dále ukažte, že tvrzení
$$\boldsymbol{C} = \{AB;\ A \in \boldsymbol{A}, B \in \boldsymbol{B}\}$$
   obecně neplatí. **6**

5. Definujte vzdálenost intervalů jako $q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \max(|\overline{a} - \overline{b}|, |\underline{a} - \underline{b}|)$. Pro vektory $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{IR}^n$ dále vzdálenost jako $Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{i=1,\ldots,n} q(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)$. Ukažte, že vzdálenostní funkce $Q : \mathbb{IR}^n \times \mathbb{IR}^n \to \mathbb{R}$ je metrika. **6**

6. Určete, jaké vlastnosti mají následující algebraické struktury: $(\mathbb{IR}, +)$, $(\mathbb{IR}, \cdot)$ a $(\mathbb{IR}, +, \cdot)$. **6**

7. Pro reálnou funkci $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ a intervaly $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{IR}$ dokažte či vyvraťte
$$f(\cup_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i) = \cup_{i=1}^n f(\boldsymbol{x}_i), \quad \mathbf{4}$$
$$f(\cap_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i) = \cap_{i=1}^n f(\boldsymbol{x}_i). \quad \mathbf{4}$$

8. Rozhodněte, zda intervalová funkce $f : \mathbb{IR} \mapsto \mathbb{IR}$ definovaná
$$f([a^c - a^\Delta, a^c + a^\Delta]) = [a^c - \tfrac{1}{2}a^\Delta, a^c + \tfrac{1}{2}a^\Delta]$$
   je isotonní v inkluzi. **4**

B Intervalové lineární soustavy
[termín odevzdání: 7.12.2017]

1. Dokažte, že x^* je řešením soustavy $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{A}x^* \cap \boldsymbol{b} \neq \emptyset$. **4**

2. Ukažte, že intervalová Gaussova eliminace neselže a dokonce nemusí dělat pivotizaci (=prohazovat řádky) pokud $\boldsymbol{A}$ je H-matice.

   Poznámka: Reálná matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je H-maticí, pokud tzv. *comparison matrix* $\langle A\rangle$ je M-maticí, kde $\langle A\rangle_{ii} = |a_{ii}|$ a $\langle A\rangle_{ij} = -|a_{ij}|$ pro $i \neq j$. Intervalová matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ je H-maticí, pokud obsahuje pouze H-matice, neboli pokud reálná matice $\langle \boldsymbol{A}\rangle$ je M-maticí, kde $\langle \boldsymbol{A}\rangle_{ii} = \operatorname{mig}(a)_{ii}$ a $\langle \boldsymbol{A}\rangle_{ij} = -\operatorname{mag}(a)_{ij}$ pro $i \neq j$. **8**

3. Pokud $\rho(A^\Delta) < 1$, tak Krawczykovy iterace $\boldsymbol{x} \mapsto K(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + (I_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ konvergují k pevnému bodu $\boldsymbol{x} = K(\boldsymbol{x})$. Najděte explicitní vyjádření tohoto pevného bodu, stačí pro případ $A^c = I_n$. **8**

4. Buď $\boldsymbol{A}$ nezáporně invertibilní a buď $\overline{A}^{-1}\underline{b} \geq 0$. Ukažte, že pak pro množinu řešení Σ soustavy $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ platí $\square\Sigma = [\overline{A}^{-1}\underline{b}, \underline{A}^{-1}\overline{b}]$. **8**

5. Následující vlastnosti jsou nutné pro regularitu $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$. Rozhodněte, které jsou také postačující:

   (a) $A_{yz} = A^c + \operatorname{diag}(y)A^\Delta \operatorname{diag}(z)$ je regulární pro každé $y, z \in \{\pm 1\}^n$. **4**

   (b) Všechny matice A tvaru $a_{ij} \in \{\underline{a_{ij}}, \overline{a_{ij}}\}$ jsou regulární. **4**

Následující příklady jsou praktické pro vyzkoušení na počítači. Doporučuje se použít INTLAB (kdo nemá, mohu poskytnout), což je knihovna se základními intervalovými funkcemi pro Matlab.

6. Uvažujte funkci mající následující ekvivalentní formy:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1\\
g(x) &= 1 + x(-6 + x(15 + x(-20 + x(15 + x(-6 + x)))))\\
h(x) &= (x-1)^6
\end{aligned}
$$

   Vypočtěte obálky $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$ a $h(\boldsymbol{x})$ pro dané $\boldsymbol{x} := [0.999, 1.001]$. **4**

7. Rovnice zapojení elektrického obvodu je vyjádřena jako:

$$
\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}.
$$

   Pro $V_1 = 10$, $V_2 = 5$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1000 \pm 10\%$ nalezněte obálku pro I_1 a I_2. Zkuste využít a parovnat různé metody, které nabízí INTLAB, VERSOFT, internet nebo co si sami naprogramujete. **10**

   Dokážete využít závislosti parametrů k poupravení soustavy a nalezení těsnější obálky?

C Intervalová lineární algebra
[termín odevzdání: 12.1.2018]

Intervalové rovnice a nerovnice:

1. Charakterizujte, kdy $x \in \mathbb{R}^n$ je tzv. silným řešením intervalové soustavy rovnic $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, tj. kdy x splňuje naráz všechny rovnice $Ax = b$ pro $A \in \boldsymbol{A}$ a $b \in \boldsymbol{b}$. **4**

2. Zobecněme pojem parametrické řešení pro soustavy intervalových nerovnic:
$$\Sigma_{\mathrm{p}} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ A(p)x \leq b(p) \text{ pro nějaké } p \in \boldsymbol{p}\},$$
kde uvažujeme lineární závislosti
$$A(p) = \sum_{k=1}^{K} A^k p_k, \quad b(p) = \sum_{k=1}^{K} b^k p_k, \quad p \in \boldsymbol{p} \in \mathbb{IR}^K.$$
Podobně jako na přednášce charakterizujte $x \in \Sigma_{\mathrm{p}}$ pomocí nutné podmínky. **6**

3. Zobecněme pojem AE řešení pro soustavy intervalových nerovnic $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$:
$$\Sigma_{AE} := \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ \forall A^{\forall} \in \boldsymbol{A}^{\forall}\, \forall b^{\forall} \in \boldsymbol{b}^{\forall}\, \exists A^{\exists} \in \boldsymbol{A}^{\exists}\, \exists b^{\exists} \in \boldsymbol{b}^{\exists} : (A^{\forall} + A^{\exists})x \leq b^{\forall} + b^{\exists}\right\}.$$
Charakterizujete množinu AE řešení Σ_{AE}. Aplikujete popis speciálně na toleranční řešení **6**
$$\Sigma_{tol} := \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ \forall A \in \boldsymbol{A}\, \exists b \in \boldsymbol{b} : Ax \leq b\right\}$$
a najděte jeho co nejjednodušší popis.

Vlastní čísla intervalových matic:

4. Buď A^{Δ} diagonální. Dokažte $\overline{\lambda}_1(\boldsymbol{A}^S) = \lambda_1(\overline{A})$. **4**

5. Buď $A^c \geq 0$. Dokažte $\overline{\lambda}_1(\boldsymbol{A}^S) = \lambda_1(\overline{A})$. **4**

6. Buď $\boldsymbol{v} \in \mathbb{IR}^n$. Najděte intervaly vlastních čísel $\lambda_i(\boldsymbol{A}^S)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, pro matici $\boldsymbol{A}^S = \operatorname{diag}(\boldsymbol{v})$, tedy diagonální matici s intervaly $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ na diagonále. **4**

7. Navrhněte způsob jak efektivně zjistit zda daný vektor $x \in \mathbb{R}^n$ je vlastním vektorem nějaké (aspoň jedné) matice $A \in \boldsymbol{A}^S$. **4**

8. Rozhodněte, zda matice $\boldsymbol{A}^S$ je slabě positivně definitní (tj. obsahuje aspoň jednu positivně definitní matici) právě tehdy, když matice $A_{-z,z} = A^c + \operatorname{diag}(z) A^{\Delta} \operatorname{diag}(z)$ je positivně definitní aspoň pro jedno $z \in \{\pm 1\}^n$. **4**

D Obraz funkce, Intervalová Newtonova metoda [termín odevzdání: 28.1.2018]

Obraz funkce:

1. Odvoďte vzorce pro sklony daných funkcí nad $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}$ vzhledem k $S_f(\boldsymbol{x}, a)$
   (a) $f(x)^n$, **4**
   (b) $|f(x)|$. **8**
2. Připomeňme, že mean value form používá obálku typu $f(\boldsymbol{x}) \subseteq f(a) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x} - a)$, kde $\boldsymbol{d} := f'(\boldsymbol{x})$. Charakterizujte situace, kdy existuje $a \in \boldsymbol{x}$ takové, že $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x} - a)$ má maximální levý kraj a zároveň minimální pravý kraj. **6**
3. S použitím MATLABu či jiného programu vypočtěte obálku funkce

$$f(x) = \frac{x_1^3 - x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

   nad $\boldsymbol{x} = ([2 - \delta, 2 + \delta], [2 - \delta, 2 + \delta])$ postupně pro $\delta \in \{0.01, 0.1, 1\}$ a za použití:
   (a) přirozeného intervalového rozšíření **4**
   (b) mean value form **4**
   (c) slope form **4**

Intervalová Newtonova metoda:

4. Přizpůsobte intervalovou Newtonovu metodu k nalezení obálky při vícenásobných (stačí dvojnásobných) kořenech funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **4**
5. Buď $f(x, c) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funkce s parametrem c. Buď $\boldsymbol{c} \in \mathbb{IR}$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$. Nalezněte podmínku, při které bude existovat jednoduchý kořen rovnice $f(x, c) = 0$ v intervalu $\boldsymbol{x}$ pro každé $c \in \boldsymbol{c}$. **4**
6. Dřevěná koule má poloměr $1m$ a specifickou tíhu $g_{\text{SP}} = \frac{2}{3}$. Hloubka ponoření koule h je pak dána rovnicí $h^3 - 3h^2 + \frac{8}{3} = 0$. S použitím MATLABu či jiného programu nalezněte rigorózní odhad hodnoty h. **4**

   Poznámka: Specifická tíha je dána poměrem hustoty daného objektu a hustoty vody o stejném objemu $g_{\text{SP}} = \rho_{\text{koule}}/\rho_{\text{voda}}$.