Diagonalizace hermitovské matice

Diagonalizujte hermitovskou matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$.

$p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1+i \\ 1-i & 2-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t) - (1-i)(1+i) = t^2 - 3t$

Vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 0$.

Příslušná unitární matice sestavená z vlastních vektorů je $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Dále $R^{-1} = R^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. (Dokonce je inverzní sama k sobě: $R^{-1} = R$.)

Diagonalizace se nyní provede součinem: $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Při obráceném pořadí vl. čísel $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ dostaneme $S = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

$S^{-1} = S^H = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ a nyní diagonalizujeme $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.