

Homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konst. koeficienty

$$\begin{array}{l} y_1' = a_{1,1}y_1 + \dots + a_{1,n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n,1}y_1 + \dots + a_{n,n}y_n \end{array} \quad \text{reprezentujeme maticí } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Je-li λ vlastní číslo a $(k_1, \dots, k_n)^T$ je příslušný vlastní vektor matice A , potom n -tice funkcí $y_i(x) := k_i e^{\lambda x}$ řeší danou soustavu:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (k_1 e^{\lambda x})' \\ \vdots \\ (k_n e^{\lambda x})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda k_1 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ \lambda k_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \lambda \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = e^{\lambda x} A \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1}k_1 e^{\lambda x} + \dots + a_{1,n}k_n e^{\lambda x} \\ \vdots \\ a_{n,1}k_1 e^{\lambda x} + \dots + a_{n,n}k_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}y_1 + \dots + a_{1,n}y_n \\ \vdots \\ a_{n,1}y_1 + \dots + a_{n,n}y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Poznámka: Ostatní vlastní čísla a vlastní vektory dávají jiná dílčí řešení. Výsledné řešení je takovou lineární kombinací dílčích řešení, že vyhovuje okrajovým podmínkám úlohy.