

Číslo vlastní populací králíků

Předpokládejme, že pro počet králíků kdekoli na světě platí jednoduchý univerzální zákon a to, že počet králíků v letošním roce je součtem počtů králíků v loňském roce a předloni.

Označíme-li F_t tento počet v roce t , dostáváme známý rekurentní vztah pro Fibonacciova čísla $F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$.

Můžeme se ptát, jak se vyvíjí poměr $\frac{F_t}{F_{t-1}}$, zdali má tento trend limitu, nebo zdali osciluje nebo zdali pro nějakou volbu velikostí populací zůstává stabilní.

Totéž v řeči matic a vektorových prostorů:

Uvažme prostor \mathbb{R}^2 potom lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisem

$$\begin{pmatrix} F_t \\ F_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{t-1} \\ F_{t-2} \end{pmatrix}$$

popisuje tentýž rekurentní vztah.

Např. začneme-li s jedním králíkem dostaneme posloupnost

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \dots$$

Stabilní poměr $\frac{F_t}{F_{t-1}}$, mají netriviální vektory $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} F_t \\ F_{t-1} \end{pmatrix}$ takové, že:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ (vektory \mathbf{x} a $\lambda \mathbf{x}$ mají zřejmě tento poměr stejný).

Jaké to jsou? ... lze ověřit, že máme dvě vlastní čísla a to:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

...vektor při každé iteraci narůstá

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

... zde vektor mění znaménko a blíží se k nulovému vektoru