

Determinant Vandermondovy matice

$$V_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

První řádek odečteme od všech ostatních. Potom z i -tého řádku vytkneme $x_i - x_1$ (pro $i = 2, \dots, n+1$). Dostaneme v prvním sloupci n nul a po rozvinutí

$$|V_n| = \prod_{i=2}^{n+1} (x_i - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 & \dots & x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \dots + x_1^{n-1} \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2 & \dots & x_3^{n-1} + x_3^{n-2}x_1 + \dots + x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} + x_1 & x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_1 + x_1^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} + x_{n+1}^{n-2}x_1 + \dots + x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

Nyní *odzadu* od každého sloupce odečteme x_1 násobek předchozího sloupce, čímž eliminujeme všechny výrazy v nichž vystupuje x_1 .

Dostali jsme rekurentní formuli:

$$|V_n(x_1, \dots, x_{n+1})| = \prod_{i=2}^{n+1} (x_i - x_1) \cdot |V_n(x_2, \dots, x_{n+1})| = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$$