Výpočet determinantu

Převodem na odstupňovaný tvar (nad $\mathbb{Z}_5$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Provedené úpravy:

1. přičtení trojnásobku prvního řádku ke druhému řádku a přičtení (jednonásobku) prvního řádku ke třetímu
2. prohození řádků podle permutace s cykly $((1),(2,3,4))$ — nemění znaménko
3. přičtení třetího *sloupce* ke druhému

Rozvojem podle prvního řádku

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
&= -3 - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) \;=\; 0
\end{aligned}$$

K určení znaménka druhého determinantu:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ . & 4 & 6 \\ . & 7 & 9 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

1. prohození sloupců podle transpozice $(1, 2))$ změní znaménko
2. zbytek prvního sloupce determinant neovlivní
3. pevný bod (1) lze z permutací vytknout a zmenšit řád matice