# 14. Kvadratické formy a Sylvestrův zákon setrvačnosti

**Cv. 14.1** Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

***Řešení:***

K diagonalizaci kvadratické formy můžeme využít elementárních řádkových úprav. Jediné, co musíme zajistit je, že po aplikaci elementární řádkové úpravy aplikujeme odpovídající elementární sloupcovou úpravu.

U matice $A$ nejprve prohodíme pořadí 1. a 2. řádku (a následně i sloupců),

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

V dalším kroku nejprve přičteme 1. řádek k 2. řádku (dále 1. sloupec k 2. sloupci), a stejně tak $(-1)$-násobek 1. řádku k 3. řádku (obdobně pro sloupce). Dostáváme,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nakonec přičteme $(-2)$-násobek 2. řádku k 3. řádku a provedeme odpovídající operaci pro sloupce, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme matici v diagonálním tvaru. Podle Sylvestrova zákonu o setrvačnosti je matice $A$ positivně semidefinitní, má dvě kladné a jedno nulové vlastní číslo.

U matice $B$ nejprve prohodíme 1. řádek a 2. řádek (a obdobně pro sloupce)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní odečteme 1. řádek od 2. řádku (obdobně pro sloupce), a pak odečteme 1. řádek od 3. řádku (obdobně pro sloupce)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nakonec přičteme 2. řádek k 3. řádku (obdobně pro sloupce), čímž získáme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme matici v diagonálním tvaru, která je podle Sylvestrova zákonu o setrvačnosti indefinitní – má jedno kladné, jedno nulové a jedno záporné vlastní číslo.

Pro matici $C$ postupujeme analogicky. Problém nastane ve chvíli, když prohazujeme první dva řádky. Potom prohodíme první dva sloupce a opět dostaneme matici v původnim tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Musíme si tedy vypomoci trikem, který spočívá v tom, že provedeme nějakou jinou elementární operaci, která změní strukturu matice. Například přičteme k 1. řádku matice 2. řádek (obdobně pro sloupce) a dostaneme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní již postupujeme standardním způsobem a matici diagonalizujeme na tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matice má tedy jedno kladné a jedno záporné vlastní číslo, je indefinitní.

**Cv. 14.2** Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a určete polární bázi, tj. bázi, vůči níž je matice formy diagonální.

***Řešení:***

Pro kvadratickou formu určenou maticí $A$ je polární báze určena sloupci matice $S$, kde $S^T AS = D$ a matice $D$ je diagonální. Pro její výpočet tedy budeme postupovat stejně jako v předchozí podúloze, kde jsme matici diagonalizovali, jenom s tím rozdílem, že si budeme v průběhu výpočtu udržovat i součin matic sloupcových elementárních úprav, které na matici $C$ aplikujeme.

Budeme tedy upravovat matici $(A \mid I_3)$, přičemž na matici vlevo aplikujeme řádkové i sloupcové úpravy a na matici vpravo aplikujeme pouze sloupcové úpravy. V prvním kroku přičteme $(-1)$-násobek 1. řádku k 3. řádku (totéž pro sloupce), dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní přičteme $(-\frac{1}{2})$-násobek 2. řádku k 3. řádku (totéž pro sloupce),

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Zde bychom mohli skončit, ale z estetických důvodů provedeme ještě operaci vynásobení 3. řádku číslem 2 (totéž pro sloupce)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Polární báze je tedy tvořena sloupci matice napravo, tedy matice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Můžeme pak snadno ověřit zkouškou, že platí

$$S^T AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = D.$$

Pro matici $B$ postupujeme analogicky a dostaneme tvar:

$$(B \mid I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Matice $B$ je tedy positivně definitní a polární báze je například $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(-2,-1,2)^T$.

**Cv. 14.3** Uvažte relaci kongruence, kdy $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou v relaci, pokud existuje regulární $S$ taková, že $B = S^T AS$.

(a) Dokažte, že se jedná o relaci ekvivalence.

(b) Kolik má tříd ekvivalencí?

***Řešení:***

(a) Ukážeme, že relace kongruence splňuje reflexivitu, antisymetrii a tranzitivitu.

*Reflexivita.* Reflexivita kongruence říká, že existuje regulární matice $S$ taková, že $A = S^T AS$. Tento vztah splňuje matice $S := I_n$.

*Symetrie.* Symetrie kongruence říká, že pokud existuje regulární $S$ taková, že $B = S^T AS$, poté existuje regulární matice $U$ taková, že $A = U^T BU$. Přenásobením prvního vztahu zleva maticí $(S^T)^{-1}$ a zprava $S^{-1}$ dostáváme $A = (S^T)^{-1}BS^{-1} = (S^{-1})^T BS^{-1}$. Tedy stačí volit $U := S^{-1}$.

*Tranzitivita.* Nakonec tranzitivita říká, že pokud existují regulární matice $S$ a $U$ takové, že $B = S^T AS$ a $C = U^T BU$, poté také existuje regulární $V$, že $C = V^T AV$. Dosazením prvního vztahu do druhého dostáváme

$$C = U^T BU = U^T(S^T AS)U = (U^T S^T)A(SU) = (SU)^T A(SU).$$

Volíme tedy $V := SU$.

(b) Podle Sylvestrova zákonu o setrvačnosti je každá matice reprezentující kvadratickou formu ekvivalentní diagonální matici s prvky na diagonále z množiny $\{-1, 0, 1\}$. Protože vzhledem ke kongruenci nezáleží na pořadí prvků na diagonále, ale pouze na počtu prvků odpovídající daným hodnotám, jedná se o tzv. kombinace s opakováním a hledaný počet je $\binom{n+2}{2} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$.

**Cv. 14.4** Vyjádřete kvadratickou formu $f(x) = x^T Ax$ jako součet čtverců lineárních forem, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

***Řešení:***

Podle cvičení 14.2 víme, že existuje regulární matice $S$ a diagonální matice $D$ takové, že $S^T AS = D$. Uvažujme substituci $y = S^{-1}x$, čili $x = Sy$. Potom kvadratickou formu můžeme psát jako

$$f(x) = x^T Ax = y^T S^T ASy = y^T Dy = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} y_i^2.$$

Kvadratická forma má tvar součtu čtverců, ale v proměnných $y$. Pokud za proměnné dosadíme zpět, získáme hledaný tvar

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} d_{ii}((S^{-1})_{i*}x)^2.$$

V našem případě máme konkrétně

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Dosazením dostaneme požadovaný tvar

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1 + x_3)^2 + 2(x_2 + 0.5x_3)^2 + 2(0.5x_3)^2 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + 2(x_2 + 0.5x_3)^2 + 0.5x_3^2. \end{aligned}$$

Zkouškou (roznásobením výrazu) můžeme ověřit správnost výsledku.

**Cv. 14.5** Ukažte, že rovnice $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$ popisuje elipsu v $\mathbb{R}^2$ a zjistěte její charakteristiky (postupem z přednášky).

***Řešení:***

Aby se jednalo o elipsu, je třeba, aby rovnice šla vyjádřit ve tvaru $x^T Ax = 1$, kde $A$ je positivně definitní. Poté existuje spektrální rozklad matice $A = Q\Lambda Q^T$, kde poloosy elipsy vedou ve směru vlastních vektorů (sloupců $Q$) a jejich délky se rovnají hodnotám $1/\sqrt{\lambda_1}$, $1/\sqrt{\lambda_2}$, kde $\lambda_1, \lambda_2$ jsou vlastní čísla (čísla na diagonále matice $\Lambda$). Určíme nejprve matici $A$ a následně najdeme její spektrální rozklad,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy osy elipsy ukazují ve směrech $(1, -1)^T$ a $(1, 1)^T$ a jejich délky jsou 1 a 1/3.