13. Bilineární a kvadratické formy

Cv. 13.1 Jsou následující zobrazení bilineární formou? Pokud ano, jde o symetrickou formu?

(a) $a\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $a(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$,

(b) $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(x,y) = x_1y_2 + x_2$,

(c) $c\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $c(x,y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1$,

(d) $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $d(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$,

(e) $e\colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definované $e(A,B) = AB$.

Řešení:

(a) Bilineární formu můžeme otestovat dvěma způsoby. První možností je otestovat vlastnosti přímo z definice. Aby bylo zobrazení a bilineární, musí platit linearita v obou složkách zvlášť. Jednoduchými algebraickými úpravami dostáváme linearitu v první složce,

$$\begin{aligned} a(\alpha u \ +\beta v, w) &= (\alpha u_1 + \beta v_1)w_2 + (\alpha u_2 + \beta v_2)w_1 \\ &= \alpha(u_1w_2 + u_2w_1) + \beta(v_1w_2 + v_2w_1) \\ &= \alpha a(u,w) + \beta a(v,w), \end{aligned}$$

stejně jako linearitu v druhé složce,

$$\begin{aligned} a(w, \alpha u \ +\beta v) &= w_1(\alpha u_2 + \beta v_2) + w_2(\alpha u_1 + \beta v_1) \\ &= \alpha(w_1u_2 + w_2u_1) + \beta(w_1v_2 + w_2v_1) \\ &= \alpha a(w,u) + \beta a(w,v). \end{aligned}$$

Zobrazení a je tedy bilineární forma. To, že je a navíc symetrická dostáváme opět rozepsáním, prohozením členů sčítání a násobení,

$$a(u,v) = u_1v_2 + u_2v_1 = v_1u_2 + v_2u_1 = a(v,u).$$

Druhá možnost. Zobrazení a je bilineární forma právě tehdy, když se dá vyjádřit maticově ve formě $a(x,y) = [x]_B^T\, A\, [y]_B$, kde A je matice bilineární formy vůči bází B. Vezmeme-li za B kanonickou bázi, dostáváme

$$a(x,y) = x^TAy = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2.$$

V našem případě, kdy $a(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$ dokážeme koeficienty matice A určit snadno, $a_{11} = a_{22} = 0$ a $a_{12} = a_{21} = 1$, tedy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice je navíc symetrická, tedy i bilineární forma je symetrická.

(b) Linearita v první složce platí. Podíváme-li se na linearitu v druhé složce, dostáváme výraz

$$b(w, \alpha u \; + \beta v) = w_1(\alpha u_2 + \beta v_2) + w_2 = \alpha w_1 u_2 + \beta w_1 v_2 + w_2,$$

který se nerovná $\alpha b(w, u) + \beta b(w, v)$. To naznačuje, že forma b asi není bilineární, ale k formálnímu potvrzení musíme najít protipříklad. Uvažujme například $x = (1, 1)^T$, $y = (1, 1)^T$ a $\alpha = 2$. Potom

$$b(x, \alpha y) = 3 \neq 4 = \alpha b(x, y).$$

Forma b tedy není bilineární.

(c) Pokusme se nalézt matici C, reprezentující bilineární formu c vůči kanonické bázi. Pro tu musí platit, že

$$x^T C y = c_{11}x_1y_1 + c_{12}x_1y_2 + c_{21}x_2y_1 + c_{22}x_2y_2 = c(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1.$$

Vidíme, že daná rovnice nemá pro neznámé koeficienty c_{ij} žádné řešení, forma c asi není bilineární. Tuto domněnku potvrdíme protipříkladem. Nechť $x = (1, 0)^T$, $y = (1, 0)^T$ a $\alpha = 3$. Potom

$$b(x, \alpha y) = 10 \neq 6 = \alpha b(x, y).$$

Forma c proto není bilineární.

(d) Určíme maticovou reprezentaci, je tedy třeba najít matici D takovou, aby platilo

$$x^T D y = d_{11}x_1y_1 + d_{12}x_1y_2 + d_{21}x_2y_1 + d_{22}x_2y_2 = 1x_1y_1 + 1x_1y_2 + 2x_2y_2.$$

Porovnáním jednotlivých členů vidíme, že rovnost nastane pro matici

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která není symetrická. Zobrazení d je tedy bilineární forma, která není symetrická. Nesymetrii formy opět potvrdíme protipříkladem. Uvažujme vektory $x = e_1 = (1, 0)^T$, $y = e_2 = (0, 1)^T$; volíme tyto vektory, protože matice D je nesymetrická pro prvky $d_{12} \neq d_{21}$. Nyní

$$d(x, y) = 1 \neq 0 = d(y, x).$$

(e) Zde nelze mluvit o (bilineární) formě, protože zobrazení e zobrazuje do prostoru $\mathbb{R}^{n \times n}$, které není tělesem. Ale i tak ověříme, zda je zobrazení bilineární a případně symetrické.

Linearita v první složce

$$e(\alpha U \; + \beta V, W) = (\alpha U \; + \beta V)W = \alpha UW + \beta VW = \alpha e(U, W) + \beta e(V, W)$$

platí díky linearitě maticového násobení. Obdobně tomu je i s linearitou v druhé složce.

Aby platila symetrie, musela by platit komutativita maticového násobení, tedy $e(X, Y) = XY = YX = e(Y, X)$. To víme, že obecně neplatí, tedy zobrazení e je bilineární, ale ne symetrické.

Cv. 13.2 Najděte matici bilineárních forem vzhledem ke kanonické bázi.

(a) $b(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_3y_2$

(b) $b(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2$

Řešení:

(a) *První způsob.* Hledáme matici $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ takovou, aby

$$b(x,y) = x^T Ay = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j.$$

Tudíž prvek a_{ij} v matici A je roven koeficientu u x_iy_j ve výrazu pro $b(x,y)$. Takto najdeme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Druhý způsob využívá definici matice bilineární formy. Podle definice je $a_{ij} = b(e_i, e_j)$. Dosazením opět dostaneme, že hodnota $b(e_i, e_j)$ je rovna koeficientu u x_iy_j.

(b) Stejným postupem jako v předchozím bodě dostaneme matici bilineární formy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 13.3 Pro následující kvadratickou formu

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2^2$$

nalezněte symetrickou bilineární formu $b(x,y)$, která ji indukuje a uveďte $b(x,y)$ v maticové reprezentaci.

Řešení:

Chceme nalézt symetrickou bilineární formu

$$b(x,y) = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2$$

takovou, že $b(x,x) = f(x)$. Ze symetrie musí nutně $b_{12} = b_{21}$. Kombinací obou podmínek dostáváme

$$\begin{aligned} b(x,x) &= b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{12}x_2x_1 + b_{22}x_2^2 \\ &= b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 \\ &= 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2^2. \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že $b_{11} = 3$, $b_{12} = b_{21} = 2{,}5$ a $b_{22} = 5$. V maticové reprezentaci tedy máme

$$b(x,y) = x^T By = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2.5 \\ 2.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 13.4 Najděte matici kvadratické formy

$$f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi $B = \{(1,1,1)^T,\ (1,1,0)^T,\ (1,0,0)^T\}$. Použijte dva různé postupy: z definice a pomocí matice přechodu.

Řešení:
Podobným způsobem jako v předchozím cvičení určíme matici kvadratické formy vzhledem ke kanonické bázi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro nalezení matice C formy vzhledem k bázi B nejprve budeme postupovat z definice. Symetrická bilineární forma indukující kvadratickou formu f je $b(x,y) = x^T Ay$. Nyní vypočítáme jednotlivé prvky matice C ze vzorce $C_{ij} = b(v_i, v_j) = v_i^T A v_j$, kde $v_1, \dots, v_n$ jsou vektory dané báze. Konkrétně $C_{12} = (1,1,1)A(1,1,0)^T = 2$ atd., ze symetrie matice stačí spočítat diagonálu a horní polovinu prvků. Dostaneme

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Druhý způsob nalezení matice C spočívá ve využití matice přechodu. Sestavíme matici přechodu od báze B do kanonické báze

$$S = {}_{\text{kan}}[id]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom je matice formy f vzhledem k bázi B rovna

$$C = S^T AS = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 13.5 Pro zobrazení $b\colon \mathcal{P}^2 \times \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(p,q) = p(0)q(2)$ ukažte:

(a) b je bilineární forma,

(b) najděte matici formy vzhledem k bázi $B = \{1,\ 1+x,\ (1-x)^2\}$,

(c) vyčíslete $b(1-x, x^2-2x+2)$ dvěma různými postupy,

(d) najděte matici formy vzhledem k bázi $B' = \{1,\ x,\ x^2\}$ s využitím té staré.

Řešení:

(a) Musíme ukázat linearitu v první a druhé složce. Ukážeme linearitu v první složce, v druhé se to nahlédne analogicky. Pro dva polynomy $p_1, p_2 \in \mathcal{P}^2$ platí

$$\begin{aligned} b(p_1 + p_2, q) &= (p_1 + p_2)(0) \cdot q(2) = (p_1(0) + p_2(0)) \cdot q(2) \\ &= p_1(0) \cdot q(2) + p_2(0) \cdot q(2) = b(p_1, q) + b(p_2, q). \end{aligned}$$

Podobně pro skalár $\alpha \in \mathbb{R}$ máme

$$b(\alpha p, q) = (\alpha p)(0) \cdot q(2) = \alpha \cdot p(0) \cdot q(2) = \alpha \cdot b(p, q).$$

(b) Matici A formy b sestrojíme z definice. To znamená, že $A_{ij} = b(p_i, p_j) = p_i(0)p_j(2)$, kde $p_1, \ldots, p_n$ jsou polynomy dané báze. Konkrétně například

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1 \cdot 1 = 1, \\ A_{2,3} &= (1 + 0) \cdot (1 - 2)^2 = 1, \\ A_{3,2} &= (1 - 0)^2 \cdot (1 + 2) = 3 \end{aligned}$$

a tak dále. Dohromady dostaneme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) První způsob vyčíslení hodnoty je přímo z definice:

$$b(1 - x, x^2 - 2x + 2) = (1 - 0) \cdot (2^2 - 2 \cdot 2 + 2) = 2$$

Druhý způsob vyčíslení hodnoty je s využitím matice A bilineární formy. Nejprve spočítáme souřadnice zadaných polynomů vzhledem k bázi B

$$[1 - x]_B = (2, -1, 0)^T, \quad [x^2 - 2x + 2]_B = (1, 0, 1)^T,$$

a potom spočítáme

$$b(1 - x, x^2 - 2x + 2) = (2, -1, 0)A(1, 0, 1)^T = 2.$$

(d) K výpočtu matice formy vzhledem k jiné bázi potřebujeme sestrojit matici přechodu mezi bázemi, konkrétně

$$S = {}_B[id]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice formy vzhledem k bázi B' pak je rovna

$$S^T AS = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledek můžeme ověřit tím, že matici formy vzhledem k bázi B' spočítáme přímo z definice.

Cv. 13.6 Jednoznačnost kvadratické formy.

(a) Nechť $A, B \in \mathbb{T}^{n\times n}$ jsou symetrické a nechť $x^T Ax = x^T Bx$ platí pro všechna $x \in \mathbb{T}^n$. Rozhodněte, zda potom $A = B$.

(b) Rozhodněte, zda matice kvadratické formy vzhledem k dané bázi je jednoznačná.

Řešení:

(a) Protože rovnost $x^T Ax = x^T Bx$ platí pro všechna $x \in \mathbb{T}^n$, dosadíme do rovnice konkrétní vektory. Volbou $x := e_i$ dostaneme ze vztahu $e_i^T Ae_i = e_i^T Be_i$ rovnost diagonálních prvků $a_{ii} = b_{ii}$. Volbou $x := e_i + e_j$ dostaneme ze vztahu $(e_i + e_j)^T A(e_i + e_j) = (e_i + e_j)^T B(e_i + e_j)$ rovnost

$$a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} = b_{ii} + b_{ij} + b_{ji} + b_{jj},$$

což se zjednoduší na $a_{ij} + a_{ji} = b_{ij} + b_{ji}$. Ze symetrie matic má rovnost tvar $2a_{ij} = 2b_{ij}$. Pokud těleso $\mathbb{T}$ nemá charakteristiku 2, můžeme krátit prvkem $2 \neq 0$ a dostaneme $a_{ij} = b_{ij}$. Tudíž jsme nahlédli rovnost $A = B$ po jednotlivých prvcích.

Zbývá vyřešit případ, kdy těleso $\mathbb{T}$ má charakteristiku 2. V tomto případě rovnost $A = B$ platit nemusí. Jako protipříklad uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. Matice jsou různé, ale přesto platí

$$x^T Ax = x_1x_2 + x_2x_1 = 0 = x^T Bx$$

pro všechny vektory $x \in \mathbb{Z}_2^2$.

(b) Opět zde musíme předpokládat, že těleso $\mathbb{T}$ nemá charakteristiku 2, jinak matice formy není jednoznačná z předchozího bodu.

Nyní předpokládejme pro spor, že kvadratická forma má dvě různá maticová vyjádření vzhledem k bázi B:

$$f(x) = [x]_B^T A[x]_B = [x]_B^T C[x]_B,$$

Z předchozího bodu ale víme, že tato rovnost pro každý vektor $x \in V$, neboli každý vektor $[x]_B \in \mathbb{T}^n$, implikuje $A = C$. Proto je matice jednoznačná.

Cv. 13.7 Buď V vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbb{T}$ a nechť charakteristika tělesa $\mathbb{T}$ není 2.

(a) Ukažte, že bilineární formy a symetrické bilineární formy na prostoru V tvoří vektorové prostory a určete jejich dimenze.

(b) Ukažte, že kvadratické formy na prostoru V tvoří vektorový prostor a určete jeho dimenzi.

Řešení:

(a) Buď V prostor dimenze n nad tělesem $\mathbb{T}$. Bilineární formy na prostoru V můžeme sčítat a násobit skalárem (podobně jako funkce) a výsledkem je opět bilineární forma. Vlastnosti vektorového prostoru plynou z toho, že hodnoty formy jsou prvky tělesa $\mathbb{T}$. Nulovým vektorem je forma $b(u, v) = 0$ $\forall u, v \in V$.

Abychom spočítali dimenzi prostoru bilineárních forem, uvědomme si, že jsou jednoznačně reprezentované maticemi řádu $n \times n$, a tento vztah je lineární: Nechť $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ je báze prostoru V a uvažujme dvě bilineární formy b, b'. Těmto formám přísluší vzhledem k bázi B dvě matice A, A' definované po prvcích

$$a_{ij} = b(w_i, w_j), \quad a'_{ij} = b'(w_i, w_j).$$

Potom součet bilineárních forem je zase bilineární forma $b^* = b + b'$ a její matice A^* vzhledem k bázi B složky

$$a^*_{ij} = b^*(w_i, w_j) = (b + b')(w_i, w_j) = b(w_i, w_j) + b'(w_i, w_j) = a_{ij} + a'_{ij}.$$

Tudíž $A^* = A + A'$. Analogicky dokážeme, že násobek bilineární formy se projeví násobkem její matice.

Takže prostor bilineárních forem je isomorfní s prostorem $\mathbb{T}^{n \times n}$ a má dimenzi n^2.

Analogicky symetrické bilineární formy jsou reprezentované symetrickými maticemi z prostoru $\mathbb{T}^{n \times n}$ a symetrické matice tvoří podprostor dimenze $\frac{1}{2}n(n+1)$.

(b) Kvadratické formy jsou vzájemně jednoznačně odvozené od symetrických bilineárních forem. Při dané bázi je pak kvadratická forma určená jednoznačně symetrickou maticí a opět symetrická matice závisí lineárně na kvadratické formě. Tedy dimenze prostoru kvadratických forem je $\frac{1}{2}n(n+1)$.