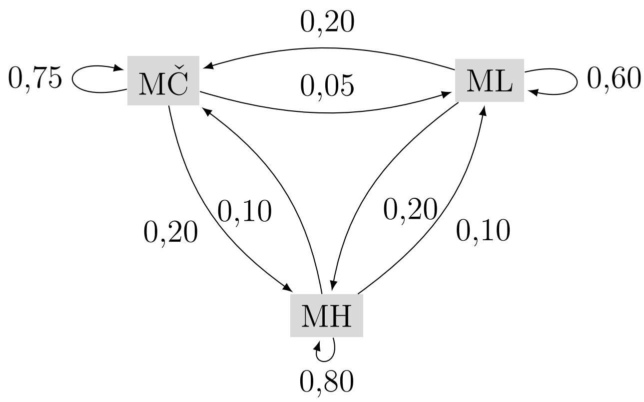
10. Vlastní čísla – metody výpočtu, odhady, Markovovy řetězce

Markovovy řetězce a nezáporné matice

Cv. 10.1 Ve městě Žebrácká Lhota fungují tři lokální politické strany, a to Moderní Čechy (MČ), Mír pro Lidi (ML) a Malé Hnutí (MH). Volby se řídí následujícím pravidlem: Z voličů strany MČ volí opět tuto stranu 75 % jejich voličů, ale k ML přejde 5 % a k MH dokonce 20 %. Z voličů ML přejde k MČ rovných 20 % a k MH také 20 %. Nakonec, z voličů MH zůstane jen 80 %, zbytek se rovnoměrně rozdělí mezi MČ a ML. Jaké bude rozdělení podpory stran v místním zastupitelstvu za delší časový horizont?

Řešení:
Pravidla pro volby v Žebrácké Lhotě ilustruje následující diagram:



Vrcholy grafu reprezentují stavy (volené politické strany) a hrany přechody mezi danými stavy, tedy přesuny voličů mezi těmito stranami. Pro výpočet výsledného rozdělení sestavíme přechodovou matici P, kde p_{ij} reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu j do stavu i:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}60 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}80 \end{pmatrix}.$$

První sloupec matice P tedy reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu MČ do stavu MČ (75 % voličů opět volí stejnou stranu MČ), do stavu ML (5 % bude volit stranu ML) a do stavu MH (20 % volí stranu MH).

Pokud je počáteční rozložení sil dáno stavovým vektorem $x_0 \in \mathbb{R}^3$, vývoj situace v čase popisují stavy $x_0, Px_0, P^2x_0, \ldots, P^\infty x_0$, kde $P^\infty x_0$ označuje limitní stav $\lim_{k\to\infty} P^k$ (pokud existuje).

Diagonalizací (tj. spektrálním rozkladem) matice P dostaneme

$$P = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}55 \end{pmatrix} S^{-1}, \text{ kde } S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 & -1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$P^\infty = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = S_{*1} S^{-1}_{1*} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Limitní stav odpovídá vektoru $P^\infty x_0 = \frac{1}{6}(2e^T x_0, e^T x_0, 3e^T x_0)^T$, rozložení podpory stran se tedy ustálí v poměru $2:1:3$.

Jelikož je matice P kladná, dominantní vlastní číslo 1 je jednoznačné a násobnosti jedna. Výsledné rozložení tak odpovídá složkám vlastního vektoru $v = S_{*1}$, který přísluší vlastnímu číslu 1. Hledaný poměr tedy můžeme také přímo najít jako složky kladného vektoru $v \in \mathrm{Ker}(P - 1 \cdot I_3)$.

Cv. 10.2 Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50 % látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25 % látky z druhé buňky přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?

Řešení:
Podobně jako v předchozím cvičení sestrojíme přechodovou matici

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

Její spektrální rozklad je

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tudíž

$$A^\infty = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Množství látky v buňkách se tedy ustálí v poměru $1:2$.

Poznámka. Protože matice A je kladná, víme, že dominantní vlastní číslo je jednoznačné a stačí pouze hledat příslušný vlastní vektor. Tím je vektor $(1,2)^T$ (druhý sloupec matice S), který nám dá přímo hledaný poměr látek v ustáleném stavu.

Cv. 10.3 Ukažte, že vlastnosti kladné matice z Perronovy věty obecně neplatí pro nezápornou matici. Konkrétně, najděte postupně takové matice $A \geq 0$, aby platily vlastnosti

(a) $\rho(A) = 0$,
(b) $\rho(A)$ je vícenásobné vlastní číslo,
(c) existuje vlastní číslo $\lambda \neq \rho(A)$ takové, že $|\lambda| = \rho(A)$.

Řešení:
Toto je kreativní příklad, takže neexistuje kuchařka, jak takové matice najít. Řešením bude v každém bodě matice, která je nezáporná, ale obsahuje i nějaké nuly. Dobrými maticemi na testování jsou například Jordanovy buňky a blokově diagonální matice.

(a) například $J_2(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) například $J_2(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(c) například $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Odhady a techniky z výpočetních metod

Cv. 10.4 Určete Gerschgorinovy disky pro matici

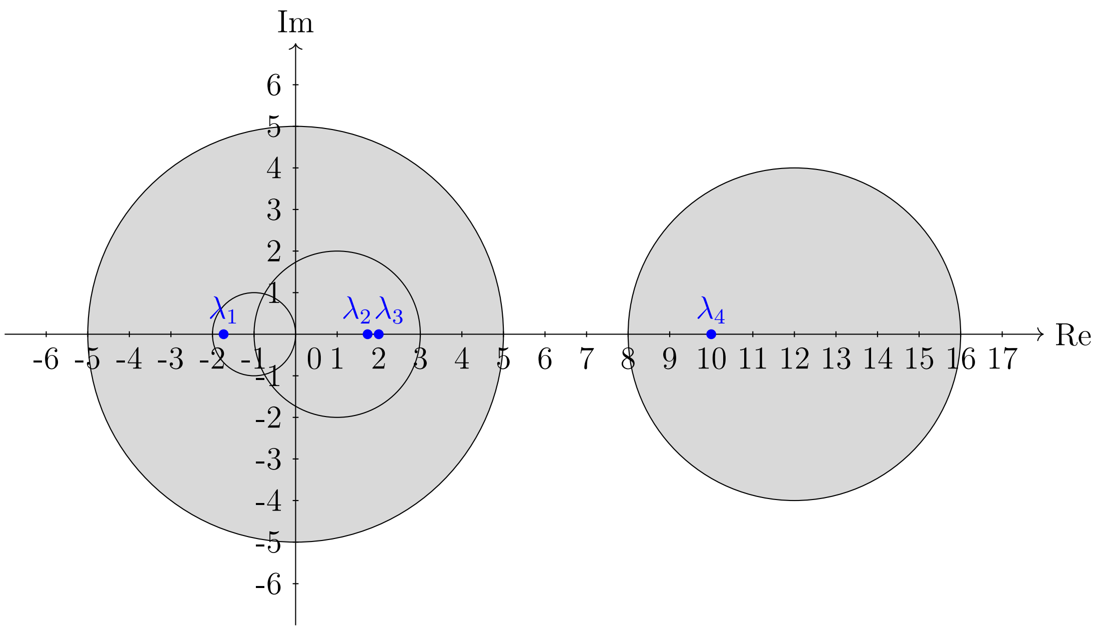
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a pomocí nich rozhodněte, zda má matice A aspoň dvě reálná vlastní čísla.

Řešení:

Dle věty o Gerschgorinových discích víme, že každé vlastní číslo matice A leží v komplexní rovině v kruhu $B(c_i, r_i)$ o středu $c_i = a_{ii}$ a poloměru $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, 4\}$. Pro zadanou matici A dostáváme následující kruhy (viz také obrázek níže):

$$\begin{aligned}
&\text{střed } c_1 = a_{11} = 1, && \text{poloměr } r_1 = |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = |0| + |-2| + |0| = 2, \\
&\text{střed } c_2 = a_{22} = 12, && \text{poloměr } r_2 = |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = |0| + |0| + |-4| = 4, \\
&\text{střed } c_3 = a_{33} = -1, && \text{poloměr } r_3 = |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = |-1| + |0| + |0| = 1, \\
&\text{střed } c_4 = a_{44} = 0, && \text{poloměr } r_4 = |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = |0| + |5| + |0| = 5.
\end{aligned}$$



Navíc víme, že každá komponenta souvislosti obsahuje tolik vlastních čísel, z kolika kruhů daná komponenta vznikla. V kruhu $B(c_4, r_4) = B(0, 5)$ tedy leží 3 vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ matice A a v kruhu $B(c_2, r_2) = B(12, 4)$ jedno vlastní číslo λ_4.

Komplexní vlastní čísla reálné matice můžeme spárovat do dvojic navzájem komplexně sdružených čísel, vlastní číslo λ_4 proto musí být reálné (jinak by v kruhu $B(12,4)$ muselo ležet i vlastní číslo $\overline{\lambda_4}$). V kruhu $B(0,5)$ leží 3 vlastní čísla, aspoň jedno z nich musí být také reálné. Nahlédli jsme tedy, že matice A má alespoň 2 reálná vlastní čísla. Výpočtem můžeme zjistit, že vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = -\sqrt{3}$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2$ a $\lambda_4 = 10$.

Cv. 10.5 Pomocí Gerschgorinových disků rozhodněte, zda je následující matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Určíme Gerschgorinovy disky a zjistíme, zda některý z nich obsahuje počátek nebo ne. Disky ve tvaru $B(c,r)$, kde c je střed a r je poloměr, postupně jsou: $B(10,8)$, $B(-7,5)$, $B(-5,4)$ a $B(7,6)$. Protože žádný z disků počátek neobsahuje, matice nemá vlastní číslo $\lambda = 0$, a proto je regulární.

Cv. 10.6 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 4.6 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda $(I_4 - A^{-1})^k \to 0$ pro $k \to \infty$.

Řešení:

Nejprve sestrojíme Gerschgorinovy disky matice A. Protože matice A je symetrická, má reálná vlastní čísla a zajímají nás proto jen intervaly, kde Gerschgorinovy disky protnou reálnou osu. Všechny tyto průsečíky jsou částí intervalu $[0.6, 15]$, tudíž vlastní čísla matice A leží v intervalu $[0.6, 15]$. Matice A^{-1} má převrácené hodnoty vlastních čísel, její vlastní čísla se tak nachází v intervalu $[1/15, 1/0.6] \subset (0,2)$. Vlastní čísla matice $-A^{-1}$ potom patří do intervalu $(-2,0)$ a konečně vlastní čísla matice $M := I_4 - A^{-1}$ leží v intervalu $(-1,1)$; viz cvičení 7.5(c). To znamená, že je $\rho(M) < 1$, a proto $M^k \to_{k\to\infty} 0$.

Cv. 10.7 Nejprve spočítejte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

a potom aplikujte větu o deflaci vlastního čísla na to největší vlastní číslo.

Řešení:

Výpočtem zjistíme, že matice A má vlastní čísla 6, 0 (dvojnásobné) a -2. Největšímu vlastnímu číslu $\lambda_1 = 6$ odpovídá znormovaný vlastní vektor $v_1 =$

$\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$. Deflací dostaneme matici

$$A' = A \ - \lambda_1 v_1 v_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tato transformace způsobila, že matice A' má stejná vlastní čísla a vlastní vektory, jako matice A, pouze vlastní číslo 6 se vynulovalo. Můžeme ověřit, že vskutku matice A' má vlastní čísla 0 (trojnásobné) a -2 a stejné vlastní vektory jako matice A.