8. Vlastní čísla – diagonalizovatelnost

Cv. 8.1 Vyšetřete vlastnost *podobnosti* jako relace.

Řešení:
Podle definice jsou dvě matice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ podobné $A \sim B$, pokud existuje regulární $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taková, že $A = SBS^{-1}$.

Reflexivita. Nejprve vyšetříme, zda je podobnost reflexivní. To by znamenalo, že existuje S taková, že $A = SAS^{-1}$. Okamžitě vidíme, že za S můžeme dosadit $S = I_n$, tedy podobnost je reflexivní relace.

Symetrie. Symetrie říká, že pokud $A = SBS^{-1}$, potom existuje regulární matice T taková, že $B = TAT^{-1}$. Přenásobením první rovnosti maticí S^{-1} zleva a maticí S zprava dostáváme výraz $S^{-1}AS = B$, tedy můžeme volit $T = S^{-1}$. Podobnost je symetrická relace.

Tranzitivita. Tranzitivita říká, že pokud $A \sim B$ a $B \sim C$, potom $A \sim C$. Jinými slovy, pokud existují regulární matice S, T takové, že $A = SBS^{-1}$ a $B = TCT^{-1}$, poté existuje regulární matice U taková, že $A = UCU^{-1}$. Dosazením druhé rovnice do první dostáváme

$$A = SBS^{-1} = S(TCT^{-1})S^{-1} = (ST)C(T^{-1}S^{-1}) = (ST)C(ST)^{-1}.$$

Vidíme, že za matici U můžeme volit $U = ST$. Tato matice bude regulární, protože součin dvou regulárních matic je opět regulární matice.

Relace podobnosti matic je tedy reflexivní, symetrická a tranzitivní, je to tudíž relace ekvivalence.

Cv. 8.2 Rozhodněte o platnosti $A \sim B \;\Rightarrow\; A^2 \sim B^2$. Jak to bude s opačnou implikací?

Řešení:
Pokud $A \sim B$, potom existuje regulární matice S taková, že $A = SBS^{-1}$. Chceme rozhodnout, zda poté existuje regulární matice T taková, že $A^2 = TB^2T^{-1}$. Pomocí prvního vztahu můžeme matici A^2 vyjádřit jako

$$A^2 = (SBS^{-1})(SBS^{-1}) = SB(S^{-1}S)BS^{-1} = SBBS^{-1} = SB^2S^{-1}.$$

Vidíme tedy, že můžeme volit matici $T = S$, a tudíž implikace platí.

Opačná implikace obecně platit nebude. Ke konstrukci protipříkladu můžeme využít například vztahu, že podobné matice mají stejná vlastní čísla. Zvolme $A = I_n$ a $B = -I_n$. Diagonální matice mají vlastní čísla na diagonále, proto vlastní číslo matice A je 1 s algebraickou násobností n a vlastní číslo matice B je -1 s algebraickou násobností n. Matice A a B tedy nejsou podobné. Nicméně, $A^2 = I_n$ a $B^2 = (-I_n)(-I_n) = I_n$. Platí dokonce $A^2 = B^2$ a z reflexivity podobnosti tedy vyplývá, že $A^2 \sim B^2$.

Cv. 8.3 Určete, zda jsou následující matice diagonalizovatelné:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Řešení:

K určení diagonalizovatelnosti matice musíme rozhodnout, zda matice má n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Spočítáme tedy vlastní čísla matice a určíme, kolik jim přísluší vlastních vektorů. Jinými slovy, rozhodneme, zda algebraická a geometrická násobnost každého vlastního čísla je stejná. Vlastní vektory počítat nemusíme, to k rozhodnutí ohledně diagonalizovatelnosti není potřeba (je to potřeba k sestrojení spektrálního rozkladu, což zde nepožadujeme).

(a) Spočtěme tedy vlastní čísla matice A jakožto kořeny jejího charakteristického polynomu. Charakteristický polynom matice A je

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8 = \\ &= (4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda). \end{aligned}$$

Vlastní čísla jsou tedy $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 1$. Protože jsou navzájem různá, je matice nutně diagonalizovatelná.

(b) Postupujeme stejně jako u matice A, jen zde vyjdou komplexní vlastní čísla. Charakteristický polynom matice B se rovná $p_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Kořeny polynomu $p_B(\lambda)$ jsou $1 + i$ a $1 - i$. Opět jsou vlastní čísla navzájem různá, matice je tedy diagonalizovatelná.

(c) Charakteristický polynom matice C je $p_C(\lambda) = (5-\lambda)^2$. Matice C má tedy vlastní číslo 5 s algebraickou násobností 2. Geometrická násobnost vlastního čísla je rovna číslu

$$\operatorname{rank}(C - \lambda I_2) = \operatorname{rank}(C - 5 \cdot I_2) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Proto k vlastnímu číslu 0 existuje pouze jediný vlastní vektor, a matice C tudíž není diagonalizovatelná.

(d) Matice D je horní trojúhelníková, její vlastní čísla jsou tedy prvky na diagonále. Konkrétně, je to jednonásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 2$ a dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 7$. K prvnímu vlastnímu číslu existuje pouze jeden vlastní vektor, ale jak to bude s druhým vlastním číslem? Hodnost matice

$$D - \lambda_1 I_3 = D - 7 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je jedna, což znamená, že k λ_2 náleží dva vlastní vektory. Dohromady tak máme plný počet vlastních vektorů, a proto je matice D diagonalizovatelná.

Cv. 8.4 Rozložte následující matice na součin SDS^{-1}, kde matice S je regulární a matice D je diagonální:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Spočítáme vlastní čísla a vlastní vektory dané matice. Pokud je vlastních vektorů plný počet, tj. je jich n lineárně nezávislých, sestrojíme samotný rozklad SDS^{-1} tak, že diagonálu D budou tvořit vlastní čísla matice a sloupce matice S budou tvořit vlastní vektory matice.

(a) Charakteristický polynom matice je $p(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)$, vlastní čísla jsou tedy $2, 1, 4$. Těm odpovídají vlastní vektory $(1,2,2)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,1,1)^T$, které jsou lineárně nezávislé. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Pro výpočet můžeme využít vztahu matice A a A^T. Pokud $A = SDS^{-1}$, potom

$$A^T = (SDS^{-1})^T = (S^{-1})^T D^T S^T = (S^{-1})^T D S^T.$$

Po dosazení z předchozí podúlohy dostáváme rozklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Charakteristický polynom matice je $(4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$, vlastní čísla jsou tedy $4, 2, 1$. Těm odpovídají vl. vektory $(0,1,1)^T$, $(1,2,1)^T$, $(2,1,0)^T$, které jsou lineárně nezávislé. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 8.5 Najděte chybu v následující úvaze: Vyjděme z rovnice $Ax = \lambda x$. Je-li vlastní číslo $\lambda = 0$, pak $x \in \mathrm{Ker}(A)$. Je-li vlastní číslo $\lambda \neq 0$, pak $x \in \mathcal{S}(A)$. Protože $\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathcal{S}(A) = n$, má matice A plný počet vlastních vektorů a je tudíž diagonalizovatelná.

Řešení:
Skutečně platí, že každý vlastní vektor náleží do $\operatorname{Ker}(A)$ nebo $\mathcal{S}(A)$. Platí ale opačný směr? Libovolný vektor z $\operatorname{Ker}(A)$ je vlastním vektorem, který přísluší nulovému vlastnímu číslu. Ale ne každý vektor ze sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ musí být vlastním vektorem matice A. Například matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

má jediný vlastní vektor $x = (1,0)^T$. Proto první sloupec matice je vlastním vektorem, ale druhý sloupec není.

Cv. 8.6 Dokažte přímo Cayleyho-Hamiltonovu větu pro diagonalizovatelné matice.

Řešení:
Cayleho-Hamiltonova věta říká, že pokud pro matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ máme charakteristický polynom $p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$, poté

$$p_A(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0.$$

Pro diagonalizovatelné matice platí, že existuje regulární S taková, že $A = SDS^{-1}$, kde D je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále. Dosaďme do levé strany rovnice

$$(-1)^n(SDS^{-1})^n + a_{n-1}(SDS^{-1})^{n-1} + \cdots + a_1 SDS^{-1} + a_0 I_n.$$

Dále, protože $A^k = (SDS^{-1})^k = SD^kS^{-1}$, můžeme výraz upravit na

$$(-1)^n SD^nS^{-1} + a_{n-1}SD^{n-1}S^{-1} + \cdots + a_1 SDS^{-1} + a_0 I_n.$$

Vytkněme z výrazu matici S zleva a matici S^{-1} zprava, dostáváme

$$S((-1)^n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I_n)S^{-1}.$$

Matice $M \coloneqq (-1)^n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I_n$ má složky

$$M_{ij} = \begin{cases} (-1)^n 0^n + a_{n-1}0^{n-1} + \cdots + a_1 0 + a_0 0 = 0 & \text{pro } i \neq j, \\ (-1)^n\lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_i + a_0 = p_A(\lambda_i) = 0 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Matice M je tedy nulová. Dostáváme proto

$$p_A(A) = SMS^{-1} = S\,0\,S^{-1} = 0,$$

čímž je tvrzení dokázáno.