6. Determinanty – použití

Aplikace determinantu

Cv. 6.1 Vyřešte následující soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right).$$

Řešení:

Nejprve spočteme determinant matice A, například pomocí Gaussovy eliminace:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot 3\cdot(-7) = -7. \end{aligned}$$

Nyní spočteme determinanty matic, kde postupně nahrazujeme první, druhý a třetí sloupec pravou stranou rovnice, tedy vektorem b.

1) Spočítáme determinant matice A, jejíž první sloupec nahradíme vektorem b. Determinant spočítáme Laplaceovým rozvojem podle druhého sloupce:

$$\begin{aligned} \det(A_1) = \det&\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & -2 \\ 10 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+2}\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot 2 + (-1)^{2+2}\cdot 1\cdot(-9) + (-1)^{3+2}\cdot(-1)\cdot 4 \\ &= -7. \end{aligned}$$

První složka x_1 výsledného řešení $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ je pak rovna

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

2) Nyní v matici A nahradíme druhý sloupec na vektor b a spočítáme její determinant

$$\begin{aligned} \det(A_2) &= \det\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -\det\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -8 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\det\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7. \end{aligned}$$

Dostáváme $x_2 = \frac{7}{-7} = -1$.

3) Dopočítáme třetí složku výsledného vektoru (nahrazujeme třetí sloupec):

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 6 & -24 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = -14.$$

Dostáváme $x_3 = \frac{-14}{-7} = 2$.

Závěr: Řešením soustavy je vektor $x = (1, -1, 2)^T$.

Cv. 6.2 Vyřešte následující soustavu rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$ pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 3 \\ 2 & 1 & a \end{array}\right).$$

Řešení:

Nejprve určíme determinant matice A:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = a \cdot 1 - 2 \cdot 1 = a - 2.$$

Nyní musíme rozlišit dva případy:

1. Pro $a \neq 2$ je matice regulární a můžeme postupovat podle Cramerova pravidla. Spočítáme determinant matice A, jejíž první sloupec nahradíme vektorem b:

$$\det(A_1) = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} = 3 - a.$$

Dále spočítáme determinant matice A, jejíž druhý sloupec nahradíme vektorem b:

$$\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix} = a^2 - 6.$$

Řešení soustavy má tedy tvar pro $a \neq 2$:

$$x = (x_1, x_2)^T = \left(\frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \frac{\det(A_2)}{\det(A)}\right)^T = \left(\frac{3-a}{a-2}, \frac{a^2-6}{a-2}\right)^T.$$

2. Pro $a = 2$ je matice A singulární, a soustavu musíme vyřešit zvlášť. Dosazením $a := 2$ získá soustava konkrétní tvar

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Je zřejmé, že v tomto případě je soustava neřešitelná.

Cv. 6.3 Pomocí determinantu určete obsah trojúhelníku s vrcholy

(a) $a = (1,1)^T$, $b = (2,5)^T$, $c = (3,2)^T$,

(b) $a = (1,3,1)^T$, $b = (3,3,3)^T$, $c = (3,1,2)^T$.

Řešení:

(a) Trojúhelník posuneme o vektor $-(1,1)^T$, tedy tak, aby vrchol a přešel do počátku. Dostaneme trojúhelník s vrcholy $a' = (0,0)^T$, $b' = (1,4)^T$, $c' = (2,1)^T$. Uvažujme matici

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

jejíž řádky jsou tvořeny vektory b', c'. Z geometrické interpretace determinantu víme, že hodnota $|\det(M)|$ udává obsah rovnoběžníku, určeného vektory b', c'. Zadaný trojúhelník má poloviční obsah, proto je hledaná hodnota

$$\frac{1}{2}|\det(M)| = \frac{1}{2}|-7| = \frac{7}{2}.$$

(b) Postupujeme analogicky, jako v předchozím případě. Posuneme trojúhelník o vektor $-(1,3,1)^T$, čímž se vrchol a posune do počátku. Dostaneme trojúhelník s vrcholy $a' = (0,0,0)^T$, $b' = (2,0,2)^T$, $c' = (2,-2,1)^T$. Nyní sestavíme matici

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

jejíž řádky jsou tvořeny vektory b', c'. Protože matice není čtvercová, obsah rovnoběžníku, určeného vektory b', c', určíme nyní podle obecnějšího vzorce $\sqrt{\det(MM^T)}$. Zadaný trojúhelník má opět poloviční obsah, čili

$$\frac{1}{2}\sqrt{\det(MM^T)} = \frac{1}{2}\sqrt{\det\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3.$$

Cv. 6.4 Určete objem elipsoidu, který vznikne obrazem jednotkové koule při zobrazení $x \mapsto Ax$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Z geometrické interpretace determinantu víme, že lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ mění objemy s faktorem $|\det(A)|$. Jednotková koule má objem $\frac{4}{3}\pi$ a determinant je roven $\det(A) = 9$, čili elipsoid má objem $\frac{4}{3}\pi|\det(A)| = \frac{4}{3}\pi 9 = 12\pi$.

Adjungovaná matice

Cv. 6.5 Spočítejte adjungovanou matici k matici A a ověřte vztah $A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)I_n$

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Adjungovanou matici spočítáme podle definice. Adjungovaná matice $\operatorname{adj}(A)$ má stejný rozměr jako matice A a její prvky jsou určené vzorečkem $\operatorname{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A^{ji})$, kde A^{ji} představuje matici A po odstranění j-tého řádku a i-tého sloupce. Dostaneme

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vztah $A\operatorname{adj}(A) = \det(A)I_n$ ověříme snadno dosazením

$$A\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \det(A)I_2.$$

(b) Postupujeme opět podle definice. Pro ilustraci ukážeme detailně výpočet prvního řádku adjungované matice:

$$\operatorname{adj}(A)_{11} = (-1)^{1+1}\det(A^{11}) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$
$$\operatorname{adj}(A)_{12} = (-1)^{1+2}\det(A^{21}) = -\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2,$$
$$\operatorname{adj}(A)_{12} = (-1)^{1+3}\det(A^{31}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4.$$

Zbylé prvky dopočítáme analogicky. Nakonec dostaneme

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vztah $A\operatorname{adj}(A) = \det(A)I_n$ opět ověříme snadno dosazením

$$A\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \det(A)I_3.$$

Cv. 6.6 Vyjádřete $\operatorname{adj}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Řešení:

Podle definice určíme jednotlivé prvky adjungované matice:

$$\operatorname{adj}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.7 Spočítejte adjungovanou matici k následujícím maticím:

(a) I_n,

(b) $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Zde můžeme využít vzorečku, že pro regulární matici A platí $\operatorname{adj}(A) = \det(A)A^{-1}$. V našem případě $\operatorname{adj}(I_n) = \det(I_n)I_n^{-1} = I_n$.

(b) Zde musíme postupovat z definice, protože obecná diagonální matice nemusí být regulární. Mimodiagonální prvky adjungované matice budou nulové, protože odstraněním j-tého řádku a i-tého sloupce z matice pro $i \neq j$ dostaneme singulární matici (má nulový řádek). Pro i-tý prvek na diagonále máme

$$\operatorname{adj}(D)_{ii} = (-1)^{i+i} \det(D^{ii}) = d_1 \dots d_{i-1} d_{i+1} \dots d_n.$$

Tudíž

$$\operatorname{adj}(D) = \begin{pmatrix} d_2 \dots d_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_1 d_3 \dots d_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_1 \dots d_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.8 Vyjádřete $\det(\operatorname{adj}(A))$ vzorečkem pomocí $\det(A)$.

Řešení:
Rozlišíme dva případy:

1. Nechť A je regulární: Potom podle známých vzorců vyjádříme

$$\begin{aligned} \det(\operatorname{adj}(A)) &= \det(\det(A)A^{-1}) = \det(A)^n \det(A^{-1}) \\ &= \det(A)^n \det(A)^{-1} = \det(A)^{n-1}. \end{aligned}$$

2. Nechť A je singulární. Potom $\det(A) = 0$ a tudíž $A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I_n = 0$. Rozlišíme dva podpřípady: Pokud je $A = 0$, potom $\operatorname{adj}(A) = 0$ a dostaneme $\det(\operatorname{adj}(A)) = 0$. Pokud $A \neq 0$, potom $\operatorname{adj}(A)$ je singulární, neboť regulární matice se nemůže s nenulovou maticí vynásobit na nulovou (což pokrývá definici regulární matice, která říká, že s nenulovým vektorem se nemůže vynásobit na nulový vektor). Tudíž opět dostáváme $\det(\operatorname{adj}(A)) = 0$.

Závěr: Zahrnuvše oba případy, můžeme tvrdit, že $\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$.