2. Ortonormální systém a Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Cv. 2.1 Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $(3,2,1)^T$ vůči ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$.

Cv. 2.2 V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi $B = \{z_1, \ldots, z_r\}$ řádkového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 2.3 Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Cv. 2.4 Buď $x_1 = (1,1,0)^T$, $x_2 = (1,1,1)^T$:

(a) ortogonalizujte vektory v pořadí x_1, x_2,

(b) ortogonalizujte vektory v pořadí x_2, x_1.

Cv. 2.5 Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

(a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?

(b) dostane na vstup ortogonální vektory?

(c) dostane na vstup ortonormální vektory?

(d) dostane na vstup $-x_i$ namísto x_i? Jak se změní výstup?

Cv. 2.6 V prostoru $\mathbb{C}^3$ ortogonalizujte $x_1 = (i,i,i)^T$, $x_2 = (0,i,i)^T$, $x_3 = (0,0,i)^T$.

Cv. 2.7 Najděte ortonormální bázi podprostoru $\mathbb{R}^3$ popsaného rovnicí $x - y + z = 0$.

Cv. 2.8 Pro skalární součin $\langle x, y \rangle \coloneqq 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ zortogonalizujte vektory $x_1 = (1,0)^T$, $x_2 = (1,1)^T$.