3. Ortogonální doplněk a projekce

Ortogonální doplněk

Cv. 3.1 Pro vektorový prostor V určete $V^\perp$, $\{0\}^\perp$, $\{\}^\perp$.

Řešení:
Ortogonální doplněk prostoru V má z definice tvar

$$V^\perp := \{x \in V \ ; \forall y \in V : \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Žádný nenulový vektor není kolmý sám na sebe, protože podle definice skalárního součinu je $\langle x, x\rangle > 0$ pro libovolné $x \neq o$. To znamená, že $V^\perp$ obsahuje pouze nulový vektor, čili $V^\perp = \{o\}$.

Každý vektor je kolmý na nulový vektor, čili $\langle x, o\rangle = 0$. Proto $\{0\}^\perp = V$.

V posledním případě máme $\{\}^\perp = V$, protože na vektory $x \in V$ neklademe žádnou podmínku. Neexistuje totiž vektor v $\{\}$, na který by musel být x kolmý.

Cv. 3.2 Buď $M, N \subseteq V$. Ukažte

(a) $M \subseteq N \;\Rightarrow\; N^\perp \subseteq M^\perp$, ale ne naopak,

(b) $(M \cup N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$.

Řešení:

(a) Ortogonální doplňky daných množin jsou

$$N^\perp = \{x \in V \ ; \forall y \in N : \langle x, y\rangle = 0\}$$

a

$$M^\perp = \{x \in V \ ; \forall y \in M : \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Vidíme, že pokud vektor $x \in N^\perp$, poté je kolmý na všechny vektory $y \in N$ a tudíž i na všechny vektory $y \in M \subseteq N$. Tím pádem musí ležet také v $M^\perp$.

Opačný vztah platit nemusí. Mějme například $M = \{0\}$ a $N = \{\}$. Potom platí $M^\perp = N^\perp = V$, ale přesto $M \not\subseteq N$.

(b) Dané množiny se dají vyjádřit jako

$$(M \cup N)^\perp = \{x \in V \ ; \forall y \in M \cup N : \langle x, y\rangle = 0\}$$

a

$$M^\perp \cap N^\perp = \{x \in V \ ; \forall y \in M : \langle x, y\rangle = 0\} \cap \{x \in V \ ; \forall y \in N : \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Množina $M^\perp \cap N^\perp$ je tedy množina vektorů, které jsou kolmá jak na vektory z množiny M, tak na vektory z N. To znamená, že je kolmá na všechny $y \in M \cup N$, což dává definici množiny $(M \cup N)^\perp$.

Cv. 3.3 Najděte podprostor $U \Subset \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^\perp$.

Řešení:

Kombinací $\dim U + \dim U^\perp = n$ se vztahem $\dim U = \dim U^\perp$ dostáváme, že $\dim U = \frac{n}{2}$, což nedává pro $n = 5$ přirozené číslo. Takový podprostor U tedy nemůže existovat.

Cv. 3.4 Spočítejte ortogonální doplněk vektoru $u = (1, 0, 0, -2)^T$ do podprostoru $V = \operatorname{span}\{v, w\} = \operatorname{span}\{(1, 2, 4, 0)^T, (0, 1, 2, 1)^T\}$.

Řešení:

Ortogonální doplněk vektoru u do podprostoru V je vektorový podprostor, který můžeme formálně vyjádřit jako

$$\{u\}^\perp = \{x \in V \; ; \langle u, x\rangle = 0\}.$$

Protože V má dimenzi 2 a u není nulový prostor, $\{u\}^\perp$ má dimenzi 1, lze tedy vyjádřit ve tvaru $\{u\}^\perp = \operatorname{span}\{y\}$, kde $y \in V$ a zároveň $y \perp u$. Protože u, y jsou nenulové ortogonální vektory, jsou zároveň lineárně nezávislé a tedy tvoří bázi prostoru V. Z toho vyplývá, že stačí vzít vektor u, doplnit ho na bází V a následně provést Gram-Schmidtovu ortogonalizaci v pořadí, kdy zachováme směr vektoru u. Konkrétně, například vezměme u, v a proveďme ortogonalizaci. Dostáváme

$$y = v - \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u = (1, 2, 4, 0)^T - \frac{1}{5}(1, 0, 0, -2)^T = \frac{1}{5}(4, 10, 20, 2)^T.$$

Všimněme si, že vektor y nemusíme pro naše potřeby normovat, protože už v tuto chvíli jednoznačně určuje $\{u\}^\perp$.

Poznámka. Aby úloha byla dobře definovaná, musí platit $u \in V$. To můžeme ověřit standardním způsobem, kdy vektor u vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů v, w. V tomto případě můžeme ověření učinit také a posteriori tak, že vyjádříme vektor w pomocí vektorů u, y. Protože vektory u, y jsou ortogonální, stačí ověřit platnost Fourierova rozvoje

$$w = \frac{\langle w, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u + \frac{\langle w, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y.$$

Cv. 3.5 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte $\mathcal{R}(A)$, $\operatorname{Ker}(A)$ a nakreslete je do obrázku.

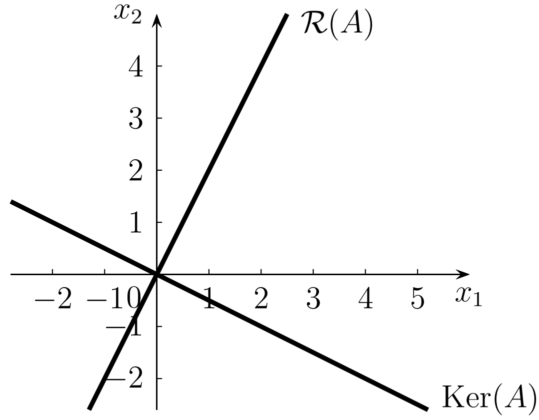
Řešení:

Řádkový prostor matice $\mathcal{R}(A)$ je generovaný řádky matice A. Okamžitě vidíme, že řádky matice jsou na sobě lineárně závislé, proto můžeme řádkový prostor vyjádřit například jako $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}\{(1, 2)^T\}$.

Jádro matice $\operatorname{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^2; \; Ax = 0\}$ odpovídá množině řešení soustavy $Ax = 0$. Odstupňovaný tvar matice A je například

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy množina řešení je přímka $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{span}\{(-2,1)^T\}$.



V obrázku jsou znázorněny oba prostory $\mathcal{R}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$ jako dvě na sebe kolmé přímky. Obrázek tedy ilustruje vlastnost, že tyto prostory jsou navzájem ortogonálními doplňky.

Cv. 3.6 Najděte bázi ortogonálního doplňku k prostoru

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Řešení:

Přímočarý postup by byl nejprve určit bázi prostoru V a následně nalézt vektor, který je na ni kolmý. To bychom mohli učinit například tak, že bázi prostoru V doplníme na bázi $\mathbb{R}^3$ a následně provedeme její ortogonalizaci, kde poslední vektor poté tvoří bázi doplňku.

Jednodušší postup je uvědomit si, že všechny vektory z prostoru V splňují rovnici $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Tudíž prostor V je jádrem matice $A = (1\ 1\ 2)$, neboli $V = \mathrm{Ker}(A)$. Podle vzorce $V^\perp = \mathrm{Ker}(A)^\perp = \mathcal{R}(A)$ pak ihned dostáváme, že ortogonální doplněk k prostoru V je generován řádky matice A, tedy $V^\perp = \mathrm{span}\{(1,1,2)^T\}$.

Ortogonální projekce

Cv. 3.7 Uvažujme standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a přímku $p = \mathrm{span}\{y\}$.

(a) Najděte bod x' na přímce p, který je nejbližší bodu $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Porovnejte velikost projekce x' a vektoru x.

(c) Sestavte matici kolmé projekce na přímku p.

(d) Najděte projekci vektoru $x = (3,-2,5)^T$ na přímku se směrnicí $y = (2,1,1)^T$.

Řešení:

(a) Z přednášky víme, že bod x' odpovídá kolmé projekci x na přímku p, která se dá vyjádřit podle věty o ortogonální projekci jako

$$x' = \left\langle x, \tfrac{y}{\|y\|} \right\rangle \tfrac{y}{\|y\|} = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y.$$

(b) Platí

$$\|x'\| = \left\| \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y \right\| = \left| \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \right| \|y\| = \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|^2}\|y\| = \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|}.$$

Zároveň můžeme Cauchy-Schwarzovu nerovnost $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ přepsat do tvaru

$$\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|} \leq \|x\|,$$

což dohromady dává $\|x'\| \leq \|x\|$. To znamená, že norma kolmé projekce je vždy shora omezena normou původního vektoru.

(c) Kolmá projekce na přímku $p = \operatorname{span}\{y\}$ má předpis $x \mapsto \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y$. Výraz ekvivalentně přepíšeme

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y = \frac{x^T y}{y^T y} y = \frac{1}{y^T y}(x^T y) y.$$

Protože $(x^T y)y = y(y^T x) = yy^T x$, můžeme projekci psát ve tvaru

$$\frac{1}{y^T y} yy^T x.$$

Vidíme, že $A = \frac{1}{y^T y} yy^T$ je maticový předpis kolmé projekce na přímku $p = \operatorname{span}\{y\}$.

(d) V zásadě dosadíme do vzorečku pro projekci konkrétní hodnoty. Spočítáme

$$\langle x,y\rangle = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 9, \quad \langle y,y\rangle = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 6.$$

Projekce tedy odpovídá vektoru $\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y = \frac{3}{2} y = \frac{3}{2}(2,1,1)^T$.

Cv. 3.8 Určete ortogonální projekci p vektoru $a = (2,2,1,5)^T$ do podprostoru generovaného ortonormálními vektory

$$B = \left\{ (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T,\ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T,\ (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T \right\}.$$

Dále určete souřadnice této projekce $[p]_B$ vzhledem k bázi B.

Řešení:

Protože B je ortonormální bází daného podprostoru, můžeme postupovat přímo podle věty o projekci, která říká, že

$$p = \sum_{i=1}^{3} \langle a, z_i\rangle z_i,$$

kde

$$z_1 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T, \quad z_2 = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T, \quad z_3 = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T.$$

Spočítáme Fourierovy koeficienty

$$\langle a, z_1\rangle = 5, \quad \langle a, z_2\rangle = -2, \quad \langle a, z_3\rangle = 1.$$

Hledaná projekce p se určí jako

$$p = \sum_{i=1}^{3} \langle a, z_i \rangle z_i = 5z_1 - 2z_2 + 1z_3 = (1,3,2,4)^T.$$

Dále vidíme, že souřadnice vektoru a vzhledem k bázi $B = \{z_1, z_2, z_3\}$ odpovídají Fourierovým koeficientům, a tedy $[p]_B = (5, -2, 1)^T$.

Cv. 3.9 Určete vzdálenost bodu $A = [5,5,3,3]$ od roviny ρ procházející počátkem a body $B = [0,1,-1,0]$ a $C = [4,-2,2,-1]$.

Řešení:

Spočítáme projekci A' bodu A do roviny ρ a hledaná vzdálenost je potom vzdálenost A od A'.

Abychom postupovali podle standardního postupu, označme vektory

$$a = (5,5,3,3)^T, \quad b = (0,1,-1,0)^T, \quad c = (4,-2,2,-1)^T.$$

Pro vyjádření projekce potřebujeme ortonormální bázi roviny $\rho = \operatorname{span}\{b, c\}$. Budeme tedy postupovat Gramovou–Schmidtovou ortogonalizací aplikovanou na vektory b, c:

$$\begin{aligned}
z_1 &:= \tfrac{1}{\|b\|} b = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(0,1,-1,0)^T,\\
y_2 &:= c - \langle c, z_1 \rangle z_1 = (4,-2,2,-1)^T - (-2\sqrt{2})\tfrac{\sqrt{2}}{2}(0,1,-1,0)^T = (4,0,0,-1)^T,\\
z_2 &:= \tfrac{1}{\|y_2\|} y_2 = \tfrac{\sqrt{17}}{17}(4,0,0,-1)^T
\end{aligned}$$

a dostaneme ortonormální bázi z_1, z_2. Projekce a' vektoru a do roviny ρ má potom tvar

$$\begin{aligned}
a' &= \langle a, z_1 \rangle z_1 + \langle a, z_1 \rangle z_1\\
&= \sqrt{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2}(0,1,-1,0)^T + \sqrt{17}\tfrac{\sqrt{17}}{17}(4,0,0,-1)^T\\
&= (4,1,-1,-1)^T.
\end{aligned}$$

Nakonec spočítáme požadovanou vzdálenost a od a' jako

$$\|a - a'\| = \|(5,5,3,3)^T - (4,1,-1,-1)^T\| = \|(1,4,4,4)^T\| = 7.$$

Závěr: Vzdálenost bodu A od roviny obsahující o, B a C je 7.

Cv. 3.10 Při standardním skalárním součinu určete vzdálenost $c \in \mathbb{R}^n$ od

(a) podprostoru $a^T x = 0$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$,

(b) podprostoru $a^T x = b$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.

Řešení:

(a) Vzdálenost c od nadroviny $a^T x = 0$ se rovná vzdálenosti c od jeho projekce c_n na tuto nadrovinu, tedy normě vektoru $c - c_n$. Výpočet ale výrazně usnadníme, pokud si uvědomíme, že vektor $c_p = c - c_n$ je vlastně projekce vektoru c na ortogonální doplněk k nadrovině, což je přímka span$\{a\}$. Projekci na přímku span$\{a\}$ umíme již vyjádřit jako

$$c_p = \frac{\langle c, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a = \frac{c^T a}{\|a\|^2} a.$$

Velikost tohoto vektoru je rovna hledané vzdálenosti

$$\|c_p\| = \left\| \frac{c^T a}{\|a\|^2} a \right\| = \frac{|c^T a|}{\|a\|^2} \|a\| = \frac{|c^T a|}{\|a\|}.$$

(b) Úlohu převedeme na předchozí případ, a to tak, že vektor c a nadrovinu $a^T x = b$ přesuneme o stejný vektor d tak, aby daná nadrovina procházela počátkem.

Jak najít vektor d? Chceme v zásadě rovnici $a^T x = b$ přepsat do tvaru $a^T(x + d) = 0$. Porovnáním obou rovnic dostaneme $a^T d = -b$. Pro vektor d máme nekonečně mnoho možností jak jej zvolit, ale řešení s jednoduchým předpisem je $d = -\frac{b}{a^T a} a$.

Posunutím o vektor d se vzdálenosti mezi objekty nezmění a úlohu tak převedeme na předchozí případ hledání vzdálenosti vektoru $c - \frac{b}{a^T a} a$ od nadroviny $a^T x = 0$. Dosazením do vzorce dostáváme

$$\frac{|(c - \frac{b}{a^T a} a)^T a|}{\|a\|} = \frac{|c^T a - b|}{\|a\|}.$$

Cv. 3.11 Rozložte $u = (3, 2, 6)^T$ na součet $u = v+w$, kde $v \in V = \text{span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T\}$ a $w \in V^\perp$.

Řešení:

Vektor v určíme jako kolmou projekci u do podprostoru V. Poté dopočítáme $w = u - v$. Matice projekce do V má tvar $P = A(A^T A)^{-1} A^T$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dosazením dostáváme

$$v = Pu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a

$$w = u - v = (3, 2, 6)^T - (3, 4, 4)^T = (0, -2, 2)^T.$$

Alternativně by bylo možné spočítat vektor u pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, kde bychom ortogonalizovali vektory $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 1)^T$, a poté spočítali projekci s využitím ortonormální báze.

Ještě jiný postup je vypočítat nejprve vektor w, a teprve potom vektor v jako $v = u - w$. Výhoda tohoto postupu spočívá v tom, že vektor w je projekcí vektoru u do podprostoru $V^\perp$. Protože $V^\perp = \text{span}\{(0, 1, -1)^T\}$, jedná se o jednoduchou projekci na přímku.

Metoda nejmenších čtverců

Cv. 3.12 Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení x' soustavy $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé.

Určete také velikost chyby $\|Ax' - b\|$.

Dostanete stejná řešení jako řešení soustavy $A^T Ax = A^T b$?

Řešení:
Přibližné řešení dané soustavy nalezneme jako souřadnice projekce vektoru b do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ matice A. Protože sloupce a_1, a_2 a a_3 matice A jsou vzájemně kolmé, je projekce vektoru b do sloupcového prostoru A přímo dána předpisem

$$b_{\mathcal{S}(A)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle b, a_i \rangle}{\|a_i\|^2} a_i = 3a_1 - 2a_2 + a_3 = (4, 8, 13, 9)^T.$$

Hledané koeficienty jsou tedy $x' = (3, -2, 1)^T$. Protože sloupce matice A jsou navzájem ortogonální (a tedy lineárně nezávislé), je nalezené x' určené jednoznačně.

Výsledná chyba je

$$\|Ax' - b\| = \|b_{\mathcal{S}(A)} - b\| = \sqrt{45}.$$

Na závěrečnou otázku je odpověď „ano“, což je známo z přednášky. Výsledné řešení je stejné jako řešení soustavy normálních rovnic $A^T Ax = A^T b$. Protože matice A má lineárně nezávislé sloupce, tak matice $A^T A$ je regulární a soustava normálních rovnic má jediné řešení $x' = (3, -2, 1)^T$.

Cv. 3.13 Metodou nejmenších čtverců spočítejte přibližné řešení soustavy $Ax = b$, kde $A = (1, \dots, 1)^T$ se skládá ze sloupce jedniček a $b \in \mathbb{R}^n$.

Řešení:
Vyjádřením soustavy normálních rovnic $A^T Ax = A^T b$ dostáváme

$$n \cdot x = \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

tedy přibližným řešením metodou nejmenších čtverců je aritmetický průměr $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i$ prvků vektoru pravých stran b.

Cv. 3.14 Hookův zákon vyjadřuje lineární úměrnost pružné deformace materiálu na použité síle. Následující tabulka obsahuje hodnoty průtahu pružiny (v palcích) v závislosti na síle/hmotnosti (v librách). Odhadněte koeficient úměrnosti.

síla F	5	7	8	10	12
průtah ℓ	11,1	15,4	17,5	22	26,3

Řešení:

Pro zadané hodnoty síly F a průtahu ℓ hledáme koeficient c, pro který platí $cF = \ell$ (např. pro první sloupec tabulky $c \cdot 5 = 11{,}1$). Chceme tedy řešit soustavu $Ax = b$ tvaru

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 11{,}1 \\ 15{,}4 \\ 17{,}5 \\ 22 \\ 26{,}3 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava nemá řešení, využijeme proto metodu nejmenších čtverců. Pro tuto soustavu dostáváme normální soustavu rovnic $A^T Ax' = A^T b$ s maticí

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = 382$$

a vektorem pravých stran

$$A^T b = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11{,}1 \\ 15{,}4 \\ 17{,}5 \\ 22 \\ 26{,}3 \end{pmatrix} = 838{,}9.$$

Přibližné řešení x' dává směrnici přímky (= koeficient úměrnosti)

$$c = (A^T A)^{-1} A^T b \approx 2{,}1961.$$