

## Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (14) Afinity prostory

**Cv. 1.** Ukažte, že množina řešení soustavy  $Ax = b$  je afinity množina a to tak, že je uzavřená na afinity kombinace.

### Řešení:

Označme jako  $X = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid Ax^* = b\}$  množinu řešení soustavy  $Ax = b$ . Pro  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  (tedy  $x_i : Ax_i = b$ ) má platit, že jejich libovolná afinity kombinace opět náleží do  $X$ , totiž

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = b \text{ kde } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Úpravou, kdy vytkneme jednotlivá  $\alpha_i$  dostáváme z výrazu na levé straně

$$\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 + \dots + \alpha_n Ax_n = \alpha_1 b + \alpha_2 b + \dots + \alpha_n b.$$

Vytkneme zprava vektor  $b$  a ze vztahu  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  dostáváme

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)b = b.$$

Proto libovolná afinity kombinace řešení soustavy  $Ax = b$  je opět jejím řešením.

**Cv. 2.** Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 2, 3)^T, x_1 = (2, 3, 1)^T, x_2 = (1, 3, 2)^T, x_3 = (2, 1, 3)^T$$

jsou afinity nezávislé.

### Řešení:

Spočítáme si vektory

$$x_1 - x_0 = (1, 1, -2)^T, x_2 - x_0 = (0, 1, -1)^T, x_3 - x_0 = (1, -1, 0)^T.$$

Tyto tři vektory jsou lineárně závislé (generují dvou-dimenzionální podprostor), proto jsou původní vektory afinity závislé.

**Cv. 3.** Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 0, 2)^T, x_1 = (2, 2, 1)^T, x_2 = (2, 1, 3)^T, x_3 = (3, 3, 2)^T$$

leží v jedné rovině.

### Řešení:

Zadané vektory  $x_0, x_1, x_2, x_3$  leží v jedné rovině právě tehdy, když dimenze afinity podprostoru  $\text{span}\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0\}$  je rovna 2. Nejprve určíme  $x_1 - x_0 = (1, 2, -1)^T, x_2 - x_0 = (1, 1, 1)^T, x_3 - x_0 = (2, 3, 0)^T$  a následně dimenzi jejich lineárního obalu pomocí hodnoty následující matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že hodnota matice je 2, tedy vektory  $x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0$  leží v rovině procházející počátkem a proto  $x_0, x_1, x_2, x_3$  leží v rovině.

**Cv. 4.** Rozhodněte, zda  $M = N$  a  $P = Q$  pro

$$(a) M = \text{span}\{(1, 2)^T\} + (1, 1)^T, N = \text{span}\{(2, 4)^T\} + (2, 3)^T$$

$$(b) P = \text{span}\{(1, 2, 1)^T, (2, 1, 0)^T\} + (1, 0, 0)^T, Q = \text{span}\{(0, 3, 2)^T, (3, 0, -1)^T\} + (2, -1, -1)^T$$

**Řešení:**

(a) Vidíme, že jak  $M$ , tak  $N$  jsou přímky (afinní podprostory dimenze 1), proto jediný vztah, v jakém mohou tyto afinní podprostory být je rovnost. A rovnost nastane právě tehdy, když libovolný bod z  $M$  leží v  $N$  a naopak. Například  $(1, 1)^T \in M$  se musí dát vyjádřit jako afinní kombinace bodů z  $N$ , tedy jako  $(1, 1)^T = \alpha(2, 4)^T + (2, 3)^T$ , kde  $\alpha \in \mathbb{R}$ . To nám dává soustavu dvou rovnic o 1 neznámé

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2 &= 1 \\ 4\alpha + 3 &= 1, \end{aligned}$$

která nemá řešení. Proto  $(1, 1)^T \notin N$  a tedy  $M \neq N$ . Dokonce ani žádný vztah z  $M \not\subseteq N$ ,  $N \not\subseteq M$  není možný.

(b) Opět musí platit, že libovolný vektor  $a(1, 2, 1)^T + b(2, 1, 0)^T + (1, 0, 0)^T \in P$  pro  $a, b \in \mathbb{R}$  náleží do  $Q$ , tedy se dá vyjádřit jako  $c(0, 3, 2)^T + d(3, 0, -1)^T + (2, -1, -1)^T$  (pro  $c, d \in \mathbb{R}$ ) a naopak. Musí proto platit mezi oběma výrazy rovnost

$$a(1, 2, 1)^T + b(2, 1, 0)^T + (1, 0, 0)^T = c(0, 3, 2)^T + d(3, 0, -1)^T + (2, -1, -1)^T,$$

která se dá zapsat soustavou tří rovnic jako

$$\begin{aligned} a + 2b + 1 &= 3d + 2 \\ 2a + b &= 3c - 1 \\ a &= 2c - d - 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Pokud budeme schopni  $c, d$  vyjádřit v závislosti na  $a, b$ , znamená to, že pro libovolný vektor z  $M$  daný souřadnicemi  $a, b$  jsme schopni nalézt odpovídající souřadnice  $c, d$  toho samého vektoru v  $N$ . Tedy ukážeme, že  $M \subseteq N$ . Podobně, pokud vyjádříme  $a, b$  v závislosti na  $c, d$ , dostaneme  $N \subseteq M$  a v důsledku  $M = N$ .

Pojďme nejprv vyjádřit  $a, b$  v závislosti na  $c, d \in \mathbb{R}$ . Tím soustavu interpretujeme jako parametrickou soustavu, kde  $c, d \in \mathbb{R}$  jsou parametry a  $a, b$  jsou neznámé. Rovnicově

$$\begin{aligned} a + 2b &= 3d + 1 \\ 2a + b &= 3c - 1 \\ a &= 2c - d - 1 \\ c, d &\in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2}$$

a maticově

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3d + 1 \\ 2 & 1 & 3c - 1 \\ 1 & 0 & 2c - d - 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c - d - 1 \\ 2 & 1 & 3c - 1 \\ 1 & 2 & 3d + 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c - d - 1 \\ 0 & 1 & -c + 2d + 1 \\ 0 & 2 & -2c + 4d + 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c - d - 1 \\ 0 & 1 & -c + 2d + 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Řešení soustavy je  $a = 2c - d - 1$  a  $b = -c + 2d + 1$ .

Podobně pro  $a, b \in \mathbb{R}$  parametry  $a, c, d$  neznámé interpretujeme soustavu rovnicově

$$\begin{aligned} 3d &= a + 2b - 1 \\ 3c &= 2a + b + 1 \\ 2c - d &= a + 1 \\ a, b &\in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3}$$

a maticově

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{cc|c} 0 & 3 & a + 2b - 1 \\ 3 & 0 & 2a + b + 1 \\ 2 & -1 & a + 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 2a + b + 1 \\ 0 & 3 & a + 2b - 1 \\ 2 & -1 & a + 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2a+b+1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+2b-1}{3} \\ 2 & -1 & \frac{3a+3}{3} \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2a+b+1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+2b-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3a+3}{3} - 2\frac{2a+b+1}{3} + \frac{a+2b-1}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Platí, že  $\frac{3a+3}{3} - 2\frac{2a+b+1}{3} + \frac{a+2b-1}{3} = 0$ , tedy soustava má řešení  $c = \frac{2a+b+1}{3}$  a  $d = \frac{a+2b-1}{3}$ .

Platí, že  $M \subseteq N$  a v důsledku  $M = N$ .

**Cv. 5.** Uvažujme dvě afinní zobrazení  $f, g$  v rovině, přičemž  $f$  představuje překlopení podle přímky  $p : y = 10$  a  $g$  představuje překlopení podle přímky  $q : x = 2$ .

- Najděte maticový předpis zobrazení  $f$ ,
- najděte maticový předpis zobrazení  $g$ ,
- z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení  $f \circ g$ .

**Řešení:**

- Zobrazení  $f(x)$  můžeme zkonstruovat pomocí složení trojice jednodušších afinních zobrazení  $f_1, f_2, f_3$  tak, že nejprve posuneme vektor  $x$  o  $(0, -5)^T$ , provedeme překlopení podél osy  $x$  a následně posuneme daný vektor zpět o  $(0, 5)^T$ . Tato zobrazení můžeme vyjádřit jako

- $f_1(x) = x + (0, -5)^T$ ,
- $f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = O_1 x$ ,
- $f_3(x) = x + (0, 5)^T$ .

Dostáváme  $f(x) = f_3(f_2(f_1(x))) = f_3(f_2(x + (0, -5)^T)) = f_3(O_1(x + (0, -5)^T)) = O_1(x + (0, -5)^T) + (0, 5)^T = O_1 x + (0, 5)^T + (0, 5)^T = O_1 x + (0, 10)^T$ .

- Zobrazení  $g(x)$  můžeme zkonstruovat podobně jako složení  $g_1, g_2, g_3$ , kde

- $g_1(x) = x + (-2, 0)^T$  (posunutí o  $(-2, 0)^T$ ),
- $g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = O_2 x$  (rotace podél osy  $y$ ),

- $g_3(x) = x + (2, 0)^T$  (posunutí nazpět o  $(2, 0)^T$ ).

Složení dostáváme  $g(x) = g_3(g_2(g_1(x))) = O_2x + (4, 0)^T$ .

- (c) Složení  $f \circ g = f(g(x)) = f(O_2x + (4, 0)^T) = O_1(O_2x + (4, 0)^T) + (0, 10)^T = O_1O_2x + O_1(4, 0)^T + (0, 10)^T = O_1O_2x + (4, 0)^T + (0, 10)^T = O_1O_2x + (4, 10)^T$ , po rozepsání maticového součinu

$$(f \circ g)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

- Cv. 6.** Dokažte, že vektory  $x_0, x_1, \dots, x_n$  jsou afinně nezávislé, právě když vektory  $y_0 = (x_0^T, 1)^T, y_1 = (x_1^T, 1)^T, \dots, y_n = (x_n^T, 1)^T$  jsou lineárně nezávislé.

**Řešení:**

Důležité je zde uvědomit si, co za dodatečnou informaci nám dává struktura vektorů  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Z jejich struktury vyplývá, že  $\sum_{i=0}^n \alpha_i y_i = 0 \iff \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i = 0$  a zároveň  $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 0$ . Jedná se totiž pouze o rozdělení vektorové rovnice na 2 části, kde v první uvažujeme prvních  $n$  složek vektorů  $y_i$  a v druhé poslední  $n+1$ . složku. Schematicky,

$$\begin{aligned} \alpha_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0_n \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff \\ \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n &= 0_n \\ \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 1 + \dots + \alpha_n \cdot 1 &= 0. \end{aligned}$$

Důkaz tvrzení si rozdělíme na 2 implikace.

- Lineární závislost  $y_0, y_1, \dots, y_n$  implikuje afinní závislost  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Pokud jsou  $y_0, y_1, \dots, y_n$  lineárně závislé, platí

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i y_i = 0$$

a zároveň existuje  $j : \alpha_j \neq 0$ . Můžeme proto vyjádřit  $y_j$  pomocí ostatních vektorů jako

$$y_j = \sum_{i \neq j} \beta_i y_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j} y_i.$$

Speciálně (omezíme-li se na prvních  $n$  složek) také

$$x_j = \sum_{i \neq j} \beta_i x_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j} x_i.$$

a (omezíme-li se na poslední složky  $y_i$ )

$$1 = \sum_{i \neq j} \beta_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j}$$

Vidíme, že  $x_j$  se dá vyjádřit jako afinní kombinace zbylých vektorů s koeficienty  $\beta_i$ . Vektory  $x_0, x_1, \dots, x_n$  jsou tedy afinně závislé.

- Afinní závislost  $x_0, x_1, \dots, x_n$  implikuje lineární závislost  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Jsou-li  $x_0, x_1, \dots, x_n$  afinně závislé, platí, že existuje  $j$  :

$$x_j = \sum_{i \neq j} \beta_i x_i \text{ a zároveň } \sum_{i \neq j} \beta_i = 1$$

Sloučením obou rovnic dostáváme

$$\begin{pmatrix} x_j \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i \neq j} \beta_i \begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

což je ekvivalentní

$$y_j = \sum_{i \neq j} \beta_i y_i.$$

Množina  $y_0, y_1, \dots, y_n$  je lineárně závislá.