Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (13) Obraz, jádro, isomorfismus

Cv. 1. [Ukázka] Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x,y,z) = (x+y-2z, y-z, x-y)^T$$

je isomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (takzvaným automorfismem).

Cv. 2. [Ukázka] Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadané obrazem báze B:

$$f(2,1,1) = (1,2,3)^T$$
$$f(1,3,5) = (3,2,1)^T$$
$$f(7,1,4) = (1,1,1)^T$$

Zjistěte, jestli je zobrazení prosté (pokud není, najděte vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ že $u \neq v \wedge f(u) = f(v)$) a jestli je na (pokud ne, najděte vektor, který nemá předobraz, tedy $u \in \mathbb{R}^3$ takové že $\forall v \in \mathbb{R}^3\colon f(v) \neq u$). Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra tohoto lineárního zobrazení.

Cv. 3. Nechť $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ jsou isomorfismy vektorových prostorů. Dokažte, že $g \circ f\colon U \to W$ je také isomorfismus vektorových prostorů (tedy že isomorfismus je ekvivalence). Speciálně ukažte, že:

(a) Jsou-li f, g prostá, pak $g \circ f$ je prosté.

(b) Jsou-li f, g na, pak $g \circ f$ je na.

Cv. 4. Rozhodněte, jestli jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní:

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři)

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{R}$

(e) $\mathbb{R}^2$ a $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$

(f) Prostor všech reálných polynomů a prostor všech reálných posloupností.

(g) $\mathbb{R}^4$ a lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Cv. 5. Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dané předpisem $A \mapsto A - A^T$ rozhodněte které vektory patří do jádra a které do obrazu:

(a) I_2

(b)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cv. 6. Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. Ukažte, že $\mathrm{Ker}(f^n) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{n+1})$.

Cv. 7. Rozhodněte, zda lineární zobrazení je prosté a zda je "na":

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c, a+b, a)^T$

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c+d, a+b+c, a+b, a)^T$

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b, 2b-c, a-b+c, a+b)^T$

(d) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b, 2b-c, a-b+c)^T$

(e) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b, 2b-c, a-b+2c)^T$

Cv. 8. Ukažte, že pro (každé dvě) matice $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ platí

$$\dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(B)) = \mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}(AB).$$