Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (11) Lineární zobrazení, matice vzhledem ke kanonické bázi

Příklady na kapitolu lineárního zobrazení lze rozdělit do několika skupin: a) technická cvičení na definici - co jsou a co nejsou lineární zobrazení; b) různá vyjádření lineárních zobrazení a převody mezi různými vyjádřeními; c) vlastnosti lineárních zobrazení; d) složené lineární zobrazení; e) izomorfismus a f) jejich kombinace a komplexnější příklady

Technická cvičení na definici - co jsou a co nejsou lineární zobrazení

Cv. 1. Rozhodněte a dokažte, zda-li zobrazení $f : R \to R$ je/není lineární zobrazení.

(a) $f_1(x) = 0$
(b) $f_2(x) = 1$
(c) $f_3(x) = 2x$
(d) $f_4(x) = x + 1$
(e) $f_5(x) = x^2$

Různá vyjádření lineárních zobrazení a převody mezi různými vyjádřeními
Následující příklady na sebe navazuji a rozvíjí se. Budeme vytvářet různé reprezentace lineárních zobrazení, kde v následujícím příkladu mírně upravíme předchozí situaci a budeme zkoumat co se stane a co dostaneme. Příklady budeme počítat nad tělesem reálných čísel.

Cv. 2. Mějme vektorový prostor $U = R^3$ a zobrazení $f : U \to U$ a mějme bázi $B_U = \{x_1 = (-1, 0, 3)^T, x_2 = (2, -2, 2)^T, x_3 = (0, 1, -3)^T\}$. Vypočtěte matici F lineárního zobrazení $f : U \to U$, o kterém víme, že zobrazí bazické vektory $f((-1, 0, 3)^T) = (-2, 0, 6)^T$, $f((2, -2, 2)^T) = (4, -4, 4)^T$, $f((0, 1, -3)^T) = (0, 2, -6)^T$. Všimněme si, že vektory jsou „2-krát zvětšeny“. $F = {}_{B_U}[f]_{B_U}$
Maticí F, reprezentující lineární zobrazení f, zobrazte vektor $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_U}$.

Cv. 3. Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru U daného bazí $B_U = \{x_1 = (-1, 0, 3)^T, x_2 = (2, -2, 2)^T, x_3 = (0, 1, -3)^T\}$ do jiného vektorového prostoru V daného bází $B_V = \{y_1 = (-1, 1, 0)^T, y_2 = (0, 1, -1)^T, y_3 = (1, 0, 1)^T\}$? Zobrazení $f : U \to V$. Jak bude vypadat matice takového zobrazení? Jako zobrazení konstruujeme? ${}_{B_V}[f]_{B_U}$
Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$ tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_V}$.

Cv. 4. Změňme zadání: Co když oproti předchozího případu, zobrazení nebude transformovat, ale jen měníme bázi (vektorový prostor)? ${}_{B_V}[id]_{B_U}$
Vypočtěte souřadnice vektoru $[x]_{B_U}$ vůči bázi B_V tj. $[x]_{B_V}$.

Cv. 5. A co kdybychom chtěli zobrazit zpět, najít $f : V \to U$? Máme vektor $[x]_{B_V}$ vyjádřený vůči bázi V a chceme ho vyjádřit vůči bázi U.
Jak vypadá matice přechodu od báze B_V k bázi B_U? (výpočet z definice) ${}_{B_U}[id]_{B_V}$
Vypočtěte souřadnice vektoru $[x]_{B_V}$ vůči bázi B_U tj. $[x]_{B_U}$.

Cv. 6. Vypočtěte matici přechodu od báze B_V k bázi B_U pomocí výpočtu inverzní matice, známe-li matici přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$.

Skládání zobrazení a matice složeného zobrazení
Již umíme konstruovat matice lineárního zobrazení z definice. Známe-li však matice vhodných zobrazení, lze jich využít jako mezivýsledků a spočítat požadovanou matici pomocí skládání lineárních zobrazení.

Víme Tvrzení 6.26 (Složené lineární zobrazení). Buďte $f : U \to V$, $g : V \to W$ lineární zobrazení. Pak složené zobrazení $g \circ f$ je zase lineární zobrazení.
Což je tvrzení hovořící o skládání lineárních zobrazení. Nás však také zajímá, co se děje ve „světě“ matic lineárních zobrazení. Umíme skládat lineární zobrazení reprezentované maticově? A pokud ano, je složené zobrazení stále lineární? Na otázku odpovídá Věta 6.27 (Matice složeného lineárního zobrazení). Buďte $f : U \to V$ a $g : V \to W$ lineární zobrazení, buď B_U báze U, B_V báze V a B_W báze W. Pak ${}_{B_W}[g \circ f]_{B_U} = {}_{B_W}[g]_{B_V} * {}_{B_V}[f]_{B_U}$.

Cv. 7. Jak bychom spočítali pomocí skládání lineárního zobrazení matici transformace a zároveň přechodu od báze B_U k bázi B_V? ${}_{B_V}[f]_{B_U}$

Cv. 8. Upravme zadání. Chceme znát matici transformace ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ ale vůči bázi B_V tj. ${}_{B_V}[f]_{B_V}$.

Cv. 9. Vypočtěte matici lineárních zobrazení F, která po řadě zobrazí vektory $\{(-1,-3,1)^T, (0,3,-2)^T, (-1,-2,2)^T\}$ na vektory $\{(-1,1,0)^T, (0,1,-1)^T, (1,0,1^T)\}$.

Cv. 10. Mějme matici M lineárního zobrazení. Kolik lineárních zobrazení popisuje matice M?

<u>Řešení:</u>
Jedná se o lehce zavádějící otázku. Odpověď záleží na podmínce, jestli máme definované báze vůči nimž zobrazení definujeme. V případě, že ano, pak matice M reprezentuje jen jedno lineární zobrazení a toto lineární zobrazení je reprezentováno právě jednou maticí, jedná se o důsledek věty 6.21 (Jednoznačnost matice lineárního zobrazení). Pokud však není uvedeno, vůči jaké bázi se zobrazení vyjadřuje, pak ke každé bázi existuje jedno lineární zobrazení.

Příklady o vlastnostech lineárních zobrazení a komplexnější příklady

Cv. 11. Rozhodněte, zdali je zobrazení $F = {}_{B_U}[id]_{B_V}$ (z předchozích příkladů) izomorfismus?

Cv. 12. Mějme lineární zobrazení $f : R^3 \to P^2$ dané maticí

$$F = {}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

kde $B_U = \{(-1,0,3)^T, (2,-2,2)^T, (0,1,-3)^T\}$, $B_V = \{(-x^2+x), (x-1), (1x^2+1)\}$.
Určete, zda-li je zobrazení ${}_{B_U}[f]_{B_V}$:

(a) prosté

(b) na

(c) je izomorfismem

(d) existuje k němu inverzní zobrazení

(e) dimenzi jádra zobrazení $dim(Ker(f))$

(f) dimenzi obrazu zobrazení $dim(f(R^3))$

(g) bázi jádra zobrazení $Ker(f)$

(h) bázi obrazu zobrazení $Im(f(U))$