Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (11) Lineární zobrazení, matice vzhledem ke kanonické bázi

Příklady na kapitolu lineárního zobrazení lze rozdělit do několika skupin: a) technická cvičení na definici - co jsou a co nejsou lineární zobrazení; b) různá vyjádření lineárních zobrazení a převody mezi různými vyjádřeními; c) vlastnosti lineárních zobrazení; d) složené lineární zobrazení; e) izomorfismus a f) jejich kombinace a komplexnější příklady

Technická cvičení na definici - co jsou a co nejsou lineární zobrazení

Cv. 1. Rozhodněte a dokažte, zda-li zobrazení $f : R \to R$ je/není lineární zobrazení.

(a) $f_1(x) = 0$

(b) $f_2(x) = 1$

(c) $f_3(x) = 2x$

(d) $f_4(x) = x + 1$

(e) $f_5(x) = x^2$

<u>Řešení:</u>

Dle Definice 6.1 (Lineární zobrazení) Buďte U, V vektorové prostory nad tělesem T. Zobrazení $f : U \to V$ je lineární, pokud pro každé $x, y \in U$ a $\alpha \in T$ platí:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Poznámka: Budeme-li na vektorové prostory nahlížet jako na *algebry*, pak je lineární zobrazení *homomorfismem* algeber, což nám z algebraického hlediska přináší silný pohled a interpretaci lineárního zobrazení, jako zobrazení zachovávajícího strukturu.

(a) Ověříme platnost podmínek lineárního zobrazení z definice:

  i. $f_1(x + y) = f_1(z) = 0 = 0 + 0 = f_1(x) + f_1(y)$ podmínka platí

  ii. $f_1(\alpha x) = f_1(w) = 0 = \alpha 0 = \alpha f_1(x)$ podmínka platí.

  Obě podmínky jsou splněny, zobrazení f_1 je lineární.

(b) Analogicky ověříme podmínky u zobrazení f_2:

  i. $f_2(x + y) = f_2(z) = 1 \neq 2 = 1 + 1 = f_2(x) + f_2(y)$ podmínka neplatí

  ii. dále bychom již nemuseli počítat, ale pro zajímavost prozkoumáme, zdali zobrazení homomorfní k druhé operaci „násobení skalárem z tělesa“ $f_2(\alpha x) = f_2(w) = 1 \neq \alpha = \alpha 1 = \alpha f_2(x)$, pro obecné $\alpha \in R$ podmínka neplatí.

  Obě podmínky nejsou splněny, zobrazení není lineární.

(c) Postup u zobrazení f_3 je také analogický:

  i. $f_3(x + y) = f_3(z) = 2z = 2(x + y) = 2(x) + 2(y) = f_3(x) + f_3(y)$ podmínka platí

ii. $f_3(\alpha x) = f_3(w) = 2 * w = 2\alpha x = \alpha 2x = \alpha f_3(x)$ podmínka platí.

Obě podmínky jsou splněny, zobrazení je lineární.

Různá vyjádření lineárních zobrazení a převody mezi různými vyjádřeními
Následující příklady na sebe navazuji a rozvíjí se. Budeme vytvářet různé reprezentace lineárních zobrazení, kde v následujícím příkladu mírně upravíme předchozí situaci a budeme zkoumat co se stane a co dostaneme. Příklady budeme počítat nad tělesem reálných čísel.

Cv. 2. Mějme vektorový prostor $U = R^3$ a zobrazení $f : U \to U$ a mějme bázi $B_U = \{x_1 = (-1, 0, 3)^T, x_2 = (2, -2, 2)^T, x_3 = (0, 1, -3)^T\}$. Vypočtěte matici F lineárního zobrazení $f : U \to U$, o kterém víme, že zobrazí bazické vektory $f((-1, 0, 3)^T) = (-2, 0, 6)^T$, $f((2, -2, 2)^T) = (4, -4, 4)^T$, $f((0, 1, -3)^T) = (0, 2, -6)^T$. Všimněme si, že vektory jsou „2-krát zvětšeny“. $F = {}_{B_U}[f]_{B_U}$
Maticí F, reprezentující lineární zobrazení f, zobrazte vektor $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_U}$.

<u>Řešení:</u>
Využijeme Definice 6.17 (Matice lineárního zobrazení), Věty 6.19 (Maticová reprezentace lineárního zobrazení) ze skript a také tvrzení, že každé lineární zobrazení je definováno obrazem báze.
Nejprve si připomeneme konstrukci matice lineárního zobrazení obecně, následně ji uchopíme intuitivně a nakonec do obecné konstrukce dosadíme konkrétní zadání úlohy.

Mějme vektorové prostory U a V na tělesem T a lineární zobrazení $f : U \to V$. Vektorový prostor U je popsán bází $B_U = \{x_1, ..., x_n\}$ a vektorový prostor V je popsán bází $B_V = \{y_1, ..., x_m\}$. *Matice lineárního zobrazení* $f : U \to V$, dle Definice 6.17, je definována ${}_{B_V}[f]_{B_U} = [f(x_j)]_{B_V}$.
Intuitivně: matici lineárního zobrazení konstruujeme tak, že j-tý sloupec matice je tvořen souřadnicemi zobrazeného vektoru x_j vůči bázi B_V, resp. sloupcový vektor x_j zobrazíme a dostáváme vektor $f(x_j)$ a tento obraz vyjádříme vůči bázi B_V tj. dostáváme sloupcový vektor zmíněné $[f(x_j)]_{B_V}$. Matici konstruujme postupně přes všechny bazické vektory.

Otázka pro lehké rozmyšlení a ověření si, že konstrukci matice lineárního zobrazení rozumíme: máme-li n vektorů báze B_U a m vektorů báze B_V kolik bude mít výsledná matice F sloupců a kolik řádků? Proč lze každé lineární zobrazení zapsat maticově?

Zpět k řešení příkladu. Konstruujeme matici lineárního zobrazení ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ z definice. V konkrétním zadání příkladu zobrazení $f : U \to U$ tedy počítáme s jednou bází a jedním vektorovým prostorem. Ukážeme si výpočet prvního sloupce matice F. Mějme první bazický vektor tj. $x_1 = (-1, 0, 3)^T$, který se zobrazí zobrazením $f((-1, 0, 3)^T) = (-2, 0, 6)^T$. Následně vektor $f(x_1)$ vyjádříme vůči bázi B_U. Řešíme soustavu lineárních rovnic $Ax = b$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & f(x_1) \\ | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
,

přičemž vektory byly napsány jako sloupce matice, vektory báze B_U jako levá část matice a vektor $f(x_1)$ jako vektor pravá strana matice.
Povšimněme si, že podle sloupcové interpretace řešení soustavy lineárních rovnic platí, že má-li soustava řešení, pravá strana matice b je rovna lineární kombinaci sloupců matice, přičemž jednotlivé proměnné x jsou koeficienty této lineární kombinace a geometricky určují „míru naškálování“ příslušných sloupců matice. Tedy díváme-li se na sloupce matice soustavy jako na bázi, tak výsledný vektor řešení x udává souřadnice vektoru pravé strany b vůči bázi dané sloupci matice tj. $[b]_{S(A)} = x$. (V případě, že sloupce matice netvoří bázi, jsou ale generátory $S(A)$ a stále platí $b \in S(A)$, pak se nejedná o souřadnice ale o koeficienty lineární závislosti.)
Výpočet vyjádření vektorů vůči bázi lze provést paralelně:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{U_1} & B_{U_2} & B_{U_3} & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 6 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$
.

Sloupcové vektory pravé strany matice tj. řešení soustavy, tvoří sloupce hledané matice lineárního zobrazení F: $F = {}_{B_U}[f]_{B_U} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Intuitivně: Vypočítali jsme matici zobrazení, která zobrazuje vektor x vyjádřený vůči bázi B_U, provede s ním transformaci (2-krát zvětší) a ponechá ho vyjádřený vůči bázi B_U. Jedná se o matici škálování, které libovolný vektor naškáluje 2-krát.

Otázka: Matice škálování vypadá „povědomě“ či „očekávatelně“. Jakou roli v tomto zobrazení hraje báze? Jak se změní matice zobrazení, změníme-li bázi resp. budeme-li mít matici zobrazení vůči jiné bázi ${}_{B_V}[f]_{B_V}$? Změní se vůbec? Na tomto místě si můžete udělat alespoň odhad.

Dle Důsledku 6.20. provedeme zobrazení vektoru $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ zobrazením f: $f(x) = Fx = [f([x]_{B_U})]_{B_U} = (2, 4, -2)^T$.

Cv. 3. Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru U daného bazí $B_U = \{x_1 = (-1, 0, 3)^T, x_2 = (2, -2, 2)^T, x_3 = (0, 1, -3)^T\}$ do jiného vektorového prostoru V daného bází $B_V = \{y_1 = (-1, 1, 0)^T, y_2 = (0, 1, -1)^T, y_3 = (1, 0, 1)^T\}$? Zobrazení $f : U \to V$. Jak bude vypadat matice takového zobrazení? Jako zobrazení konstruujeme? ${}_{B_V}[f]_{B_U}$
Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$ tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_V}$.

Řešení:
Konstruujeme matici lineárního zobrazení ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ z definice.
Princip výpočtu zůstává stejný. Změna oproti předchozímu příkladu proběhne v kroku vyjádření obrazů vektorů, kde místo báze B_U vyjadřujeme vektoru vůči bázi B_V, do které zobrazení zobrazuje.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{V_1} & B_{V_2} & B_{V_3} & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ y_1 & y_2 & y_3 & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

.

Výsledná matice ${}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Zobrazme zadaný vektor $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ lineárním zobrazením reprezentovaný maticí ${}_{B_V}[f]_{B_U}$.
Řešení: $[f([x]_{B_U})]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U}[x]_{B_U} = Fx = (2, -12, 8)^T$.

Cv. 4. Změňme zadání: Co když oproti předchozího případu, zobrazení nebude transformovat, ale jen měníme bázi (vektorový prostor)? ${}_{B_V}[id]_{B_U}$
Vypočtěte souřadnice vektoru $[x]_{B_U}$ vůči bázi B_V tj. $[x]_{B_V}$.

Řešení:
Počítáme *matici přechodu* ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ od báze B_U vektorového prostoru U k bázi B_V vektorového prostoru V.
Mnemotechnická pomůcka výpočtu: $(B_V|B_U) \sim rref \sim (I_n|{}_{B_V}[\mathrm{id}]_{B_U}))$

Postup obdobný předchozímu příkladu. Rozdíl je v kroku, kdy nebudeme provádět transformaci, resp. transformace je realizována identickým zobrazením. Do výpočtu matice lineárního zobrazení dle definice dosadíme takto:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{V_1} & B_{V_2} & B_{V_3} & B_{U_1} & B_{U_2} & B_{U_3} \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

.

Výsledná matice ${}_{B_V}[id]_{B_U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Zobrazme zadaný konkrétní vektor $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ lineárním zobrazením reprezentovaný maticí ${}_{B_V}[id]_{B_U}$.

Řešení: ${}_{B_V}[id]_{B_U}[x]_{B_U} = [id([x]_{B_U})]_{B_V} = (1, -6, 4)^T$.
Pro kontrolu lze vypočítat souřadnice vektoru vyjádřením vůči bázi soustavou přes lineární kombinaci.

Cv. 5. A co kdybychom chtěli zobrazit zpět, najít $f : V \to U$? Máme vektor $[x]_{B_V}$ vyjádřený vůči bázi V a chceme ho vyjádřit vůči bázi U.
Jak vypadá matice přechodu od báze B_V k bázi B_U? (výpočet z definice) ${}_{B_U}[id]_{B_V}$
Vypočtěte souřadnice vektoru $[x]_{B_V}$ vůči bázi B_U tj. $[x]_{B_U}$.

<u>Řešení:</u>
V předchozím postupu zaměníme levou a pravou stranu matice pro výpočet vyjádření do báze.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

.

Výsledná matice $F = {}_{B_U}[id]_{B_V} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Řešení: ${}_{B_U}[id]_{B_V}[x]_{B_V} = (1, 2, -1)^T$.
Pro kontrolu lze vypočítat souřadnice vektoru vyjádřením vůči bázi.

Cv. 6. Vypočtěte matici přechodu od báze B_V k bázi B_U pomocí výpočtu inverzní matice, známe-li matici přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$.

<u>Řešení:</u>
Vyžijeme teorie: Důsledek 6.28: Buď U a V vektorové prostory a $f : U \to V$ izomorfismus pak ${}_{B_U}[f^{-1}]_{B_V} = ({}_{B_V}[f]_{B_U})^{-1}$. Předpokládejme nyní, že víme, že zobrazení ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ je izomorfismus.

$${}_{B_U}[id^{-1}]_{B_V} = ({}_{B_V}[id]_{B_U})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Čímž jsme spočítali matici přechodu dvěma způsoby: a) výpočtem z definice matice lineárního zobrazení, b) výpočet inverzního zobrazení v případě izomorfního zobrazení.

Skládání zobrazení a matice složeného zobrazení
Již umíme konstruovat matice lineárního zobrazení z definice. Známe-li však matice

vhodných zobrazení, lze jich využít jako mezivýsledků a spočítat požadovanou matici pomocí skládání lineárních zobrazení.

Víme Tvrzení 6.26 (Složené lineární zobrazení). Buďte $f : U \to V$, $g : V \to W$ lineární zobrazení. Pak složené zobrazení $g \circ f$ je zase lineární zobrazení.
Což je tvrzení hovořící o skládání lineárních zobrazení. Nás však také zajímá, co se děje ve „světě“ matic lineárních zobrazení. Umíme skládat lineární zobrazení reprezentované maticově? A pokud ano, je složené zobrazení stále lineární? Na otázku odpovídá Věta 6.27 (Matice složeného lineárního zobrazení). Buďte $f : U \to V$ a $g : V \to W$ lineární zobrazení, buď B_U báze U, B_V báze V a B_W báze W. Pak ${}_{B_W}[g \circ f]_{B_U} = {}_{B_W}[g]_{B_V} * {}_{B_V}[f]_{B_U}$.

Cv. 7. Jak bychom spočítali pomocí skládání lineárního zobrazení matici transformace a zároveň přechodu od báze B_U k bázi B_V? ${}_{B_V}[f]_{B_U}$

Řešení:
Využijeme vypočítané matice ${}_{B_U}[f]_{B_U}$, která transformuje zobrazovaný vektor $[x]_{B_U}$ na vektor $f([x]_{B_U})_{B_U}$a následně transformovaný vektor vyjádříme vůči bázi V zobrazením maticí přechodu od báze U do báze V tj. maticí ${}_{B_U}[id]_{B_V}$, čímž získáme vektor $f([x]_{B_U})_{B_V}$. Tedy matice zobrazení ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ se vypočítá: ${}_{B_V}[f]_{B_U} = {}_{B_V}[id]_{B_U} * {}_{B_U}[f]_{B_U}$. Analogicky, znali-li bychom jiné mezivýsledky, mohli bychom spočítat matici zobrazení například následovně ${}_{B_V}[f]_{B_U} = {}_{B_V}[f]_{B_V} * {}_{B_V}[id]_{B_U}$.

Cv. 8. Upravme zadání. Chceme znát matici transformace ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ ale vůči bázi B_V tj. ${}_{B_V}[f]_{B_V}$.

Řešení:
Způsobů řešení již známe více:

(a) Matici můžeme sestavit přímo z definice analogicky postupu sestavení matice ${}_{B_U}[f]_{B_U}$

(b) Můžeme využít již spočítaných výsledků a skládání lineárních zobrazení: ${}_{B_V}[f]_{B_V} = {}_{B_V}[id]_{B_U} * {}_{B_U}[f]_{B_U} * {}_{B_U}[id]_{B_V}$.
Intuitivně: zobrazovaný vektor vůči bázi V se zobrazí maticí přechodu ${}_{B_U}[id]_{B_V}$ vůči bázi U, následně se transformuje maticí ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ a vyjádří se zpět maticí přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ vůči bázi V.

Cv. 9. Vypočtěte matici lineárních zobrazení F, která po řadě zobrazí vektory $\{(-1,-3,1)^T$, $(0,3,-2)^T, (-1,-2,2)^T\}$ na vektory $\{(-1,1,0)^T, (0,1,-1)^T, (1,0,1^T)\}$.

Řešení:
Matici lineárních zobrazení lze vypočítat i ze znalosti vektorů a jejich obrazů. Mějme množinu vektorů X a jejich obrazů Y. Vektory X je na vektory Y zobrazí maticí lineárního zobrazení F pronásobením $FX = Y$. Je-li matice X regulární, pak existuje její inverzní matice X^{-1}. Upravíme rovnici pronásobením maticí X^{-1} zprava,

dostáváme $FXX^{-1} = YX^{-1}$, což se rovná $F = YX^{-1}$.

Matice X je maticí vzorových vektorů zapsaných po sloupcích a matice Y je po sloupcích zapsanou maticí obrazů vektorů:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Inverzní matice X^{-1} k matici X se rovná:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -5 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Výsledná matice zobrazení F se rovná:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Cv. 10. Mějme matici M lineárního zobrazení. Kolik lineárních zobrazení popisuje matice M?

Řešení:

Jedná se o lehce zavádějící otázku. Odpověď záleží na podmínce, jestli máme definované báze vůči nimž zobrazení definujeme. V případě, že ano, pak matice M reprezentuje jen jedno lineární zobrazení a toto lineární zobrazení je reprezentováno právě jednou maticí, jedná se o důsledek věty 6.21 (Jednoznačnost matice lineárního zobrazení). Pokud však není uvedeno, vůči jaké bázi se zobrazení vyjadřuje, pak ke každé bázi existuje jedno lineární zobrazení.

Příklady o vlastnostech lineárních zobrazení a komplexnější příklady

Cv. 11. Rozhodněte, zdali je zobrazení $F = {}_{B_U}[id]_{B_V}$ (z předchozích příkladů) izomorfismus?

Řešení:

Možností, jak otestovat, zdali je zadané zobrazení isomorfismem máme více:

(a) Dle tvrzení 6.36 je Lineární zobrazení $f : U \to V$ isomorfismem právě tehdy, když nějaká (libovolná) matice reprezentující f je regulární. Matice F je regulární, tedy je zobrazení izomorfismem.

(b) Zobrazení je izomorfismem, pokud je současně prosté a na. Ověřování izomorfismu se převádí na případ testování prostoty a „na“.
Lineární zobrazení f je prosté, právě tehdy když $Ker(f) = o$ či obraz libovolné lineárně nezávislé množiny je lineárně nezávislá množina, dle Věty 6.12 (Prosté lineární zobrazení). Nebo dle Tvrzení 6.44. je lineární zobrazení $f : U \to V$ prosté právě tehdy, když ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ má lineárně nezávislé sloupce, kde B_U je báze vektorové prostoru U a B_V je báze vektorové prostoru V. Dále ze stejného tvrzení platí, že f je „na“ právě tehdy, když ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ má lineárně nezávislé řádky. Matice ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ má lineárně nezávislé sloupce tedy zobrazení f je prosté a má i lineárně nezávislé řádky, tedy je zobrazení f „na“. Zobrazení f je současně prosté a „na“ a proto je izomorfismem.

Cv. 12. Mějme lineární zobrazení $f : R^3 \to P^2$ dané maticí

$$F = {}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

kde $B_U = \{(-1,0,3)^T, (2,-2,2)^T, (0,1,-3)^T\}$, $B_V = \{(-x^2+x), (x-1), (1x^2+1)\}$.
Určete, zda-li je zobrazení ${}_{B_U}[f]_{B_V}$:

(a) prosté
(b) na
(c) je izomorfismem
(d) existuje k němu inverzní zobrazení
(e) dimenzi jádra zobrazení $dim(Ker(f))$
(f) dimenzi obrazu zobrazení $dim(f(R^3))$
(g) bázi jádra zobrazení $Ker(f)$
(h) bázi obrazu zobrazení $Im(f(U))$

<u>Řešení:</u>

(a) $rank(F) = 2$, z Důsledku 6.43. Buď $f : U \to V$ lineární zobrazení, pak $dim(U) = dim(Ker(f)) + dim(f(U))$, platí $dim(Ker(f)) = 3 - rank(F) = 1$. Z netriviálnosti jádra zobrazení plyne dle věty 6.12, že zobrazení f není prosté. Alternativně, zobrazení dané maticí F není prosté protože, dle Tvrzení 6.44. nemá lineárně nezávislé sloupce.

(b) Dle Věty 6.41 platí $dim(f(U)) = dim(S(F)) = rank(F)$, kde $dim(f(U))$ určuje dimenzí obrazu zobrazení f a z hodnoty dimenze vektorového prostoru P^2, které má dimenzi $dim(P^2) = 3$, platí $dim(f(U)) < dim(P^2)$ není zobrazení „na“. Alternativně, zobrazení dané maticí F není „na“ protože, dle Tvrzení 6.44. nemá lineárně nezávislé řádky.

(c) Jelikož není zobrazení f prosté a „na“, nejedná se o izomorfismus. Alternativně, nejedná se o izomorfismus, protože matice F není regulární.

(d) Jelikož není zobrazení izomorfismem, nemá inverzní zobrazení.

(e) Dle Věty 6.41 platí $dim(Ker(f)) = dim(Ker(F))$, a dle výpočtu v (a) je $dim(Ker(f)) = 1$.

(f) Dle Věty 6.41 platí $dim(f(U)) = dim(S(F)) = rank(F)$, a dle výpočtu v (b) je $dim(f(U)) = 2$.

(g) Položme si nejprve otázku: Máme-li matici $R^{(m \times n)}$. Jakému prostoru náleží vektory jádra matice? R^m nebo R^n? Jádro matice je množina vektorů, které řeší homogenní soustavu lineárních rovnic reprezentovanou maticí F (pojetí ze soustav lineárních rovnic), alternativně jádro matice tvoří množina vektorů, která je zobrazena lineárním zobrazením reprezentovaným maticí F na o (nulový vektor)(pojetí zobrazením).
Vektory jádra matice náleží do R^n (rozmyslete proč, tento krok nebývá zřejmý). Máme-li zobrazení $f : U \to V$, jakému vektorovému prostoru náleží jádro zobrazení?
Báze $Ker(F) = (-1, -1, 1)^T$ reprezentuje souřadnice bazického vektoru jádra zobrazení f vůči bázi B_U, tedy báze $Ker(f)$ je tvořena vektorem:

$$-1(-1, 0, 3)^T - 1(2, -2, 2)^T + 1(0, 1, -3)^T = (-1, 3, -8)^T$$

(h) Báze $S(F)$ je tvořena vektory $(-1, 2, -3)^T, (-1, 0, 1)^T$, což jsou souřadnice bazických vektorů obrazu zobrazení vůči bázi B_V.
Bázi obrazu $Im(f(R^3))$ tvoří systém vektorů:

$$-1(-x^2 + x) + 2(x - 1) - 3(1x^2 + 1) = (-4x^2 + 3x - 5)$$

$$-1(-x^2 + x) + 0(x - 1) + 1(x^2 + 1) = (2x^2 - x + 1)$$