

## Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (10) Maticové prostory

**Ukázka 1** (Řádkový a sloupcový prostor). Určete dimenzi a najděte bázi řádkového a sloupcového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

### Řešení:

Nejprve převedeme matici na (redukovaný) odstupňovaný tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimenzi řádkového a sloupcového prostoru matice můžeme zjistit pomocí hodnoty matice, platí vztah

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = \text{rank}(A) = 2.$$

Bázi řádkového prostoru  $\mathcal{R}(A)$  dostaneme přímo z nenulových řádků v odstupňovaném tvaru RREF( $A$ ), tedy

$$B_{\mathcal{R}(A)} = \left\{ \left(1, 0, 1, \frac{3}{2}\right)^T, \left(0, 1, 1, -\frac{1}{2}\right)^T \right\}.$$

Bázi sloupcového prostoru vybereme z původních sloupcových vektorů matice  $A$ . Volíme sloupce, které odpovídají bázi sloupcům RREF( $A$ ), t.j. první a druhý sloupec:

$$B_{\mathcal{S}(A)} = \left\{ (1, 3, 4)^T, (1, 1, -4)^T \right\}.$$

**Cv. 1.** Postupně nad tělesy  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z}_5$  a  $\mathbb{Z}_7$  rozhodněte, zda pro matici  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  platí

- (a)  $(1, 2)^T \in \text{Ker}(A)$ ,
- (b)  $(1, 2)^T \in \mathcal{S}(A)$ .

### Řešení:

Z definice jádra a sloupcového prostoru matice platí

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A) &= \{x \in \mathbb{T}^n : Ax = o\}, \\ \mathcal{S}(A) &= \text{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\} = \{Ax : x \in \mathbb{T}^n\}, \end{aligned}$$

stačí tedy ověřit, zda vektor  $(1, 2)^T$  řeší soustavu  $Ax = o$  nad daným tělesem a zda platí  $Ax = (1, 2)^T$  pro nějaké  $x \in \mathbb{T}^2$ .

Nad tělesem  $\mathbb{R}$ :

(a) vektor  $(1, 2)^T$  nepatří do jádra matice  $A$ , protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor  $(1, 2)^T$  patří do sloupcového prostoru matice  $A$ , protože soustava

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array} \right)$$

má řešení, konkrétně platí  $(1, 2)^T = \frac{3}{5}(1, 3)^T + \frac{1}{5}(2, 1)^T$ .

Nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$ :

(a) vektor  $(1, 2)^T$  patří do  $\text{Ker}(A)$ , protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor  $(1, 2)^T$  nepatří do  $\mathcal{S}(A)$ , protože soustava

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

nemá nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$  řešení.

Nad tělesem  $\mathbb{Z}_7$ :

(a) vektor  $(1, 2)^T$  nepatří  $\text{Ker}(A)$ , protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor  $(1, 2)^T$  patří do  $\mathcal{S}(A)$ , protože soustava

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

má nad tělesem  $\mathbb{Z}_7$  řešení a platí  $(1, 2)^T = 2(1, 3)^T + 3(2, 1)^T$ .

**Cv. 2.** Najděte báze prostorů  $\mathcal{R}(A)$ ,  $\mathcal{S}(A)$  a  $\text{Ker}(A)$  pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Řešení:**

Převědeme matici  $A$  do odstupňovaného tvaru:

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Bázi řádkového prostoru  $\mathcal{R}(A)$  tvoří (například) nenulové vektory v řádcích výsledné matice, tedy  $(1, 2, 0, 1)^T, (0, 0, 1, 1)^T$ .

Bázi sloupcového prostoru můžeme vybrat z původních sloupců matice  $A$ , které odpovídají bázi sloupcům odstupňovaného tvaru. Bázi sloupců jsou první a třetí, tedy vektory  $(1, 2, 3)^T$  a  $(2, 1, 1)^T$  tvoří bázi  $\mathcal{S}(A)$ .

Bázi jádra matice  $A$  získáme z řešení soustavy  $Ax = o$ . Množinu všech řešení této soustavy můžeme vyjádřit pomocí nebáziických proměnných  $x_2, x_4$  ve tvaru

$$(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4) = (-2, 1, 0, 0)x_2 + (-1, 0, -1, 1)x_4.$$

Bázi  $\text{Ker}(A)$  tedy tvoří např. vektory  $(-2, 1, 0, 0)^T, (-1, 0, -1, 1)^T$ .

**Cv. 3.** Najděte matici  $A$  takovou, že

- (a)  $\mathcal{R}(A)$  obsahuje vektory  $(1, 1)^T, (1, 2)^T$  a  $\mathcal{S}(A)$  obsahuje  $(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T$ ,
- (b) bázi  $\mathcal{R}(A)$  i  $\mathcal{S}(A)$  tvoří vektor  $(1, 1, 1)^T$  a báze  $\text{Ker}(A)$  je  $(1, -2, 1)^T$ .

**Řešení:**

- (a) Ze zadaných vektorů v řádkovém a sloupcovém prostoru vidíme, že hledáme matici  $3 \times 2$ . Požadovanou vlastnost splňují např. matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) V tomto případě hledáme matici  $3 \times 3$ , pro kterou platí

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \text{rank}(A) = \dim \text{Ker}(A) = 1.$$

Z věty o dimenzi jádra a hodnosti matice ale víme, že pro každou matici  $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$  musí platit vztah

$$\dim \text{Ker}(A) + \text{rank}(A) = n.$$

Matice splňující požadované vlastnosti tedy neexistuje.

**Cv. 4.** Rozhodněte, zda pro matice  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  platí

- (a)  $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$  implikuje  $\text{RREF}(A) = \text{RREF}(B)$ ,
- (b)  $\text{RREF}(A) = \text{RREF}(B)$  implikuje  $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ .

**Řešení:**

(a) Tvrzení neplatí, např. matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mají stejný sloupcový prostor

$$\text{span}\{(1, 0)^T, (0, 0)^T\} = \mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B) = \text{span}\{(0, 0)^T, (1, 0)^T\},$$

ale jejich redukované odstupňované tvary jsou různé (obě matice jsou v RREF).

(b) Neplatí ani opačná implikace, např. pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

máme  $\text{RREF}(A) = \text{RREF}(B) = A$ , ale zároveň

$$\text{span}\{(1, 0)^T, (0, 0)^T\} = \mathcal{S}(A) \neq \mathcal{S}(B) = \text{span}\{(0, 1)^T, (0, 0)^T\}.$$

**Cv. 5.** Z vektorů vyberte bázi prostoru  $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3, 1, 5, 4)^T, \quad v_2 = (2, 2, 3, 3)^T, \quad v_3 = (1, -1, 2, 1)^T, \quad v_4 = (1, 3, 1, 1)^T.$$

**Řešení:**

Zapišeme jednotlivé vektory do sloupců matice a převedeme ji do (redukovaného) odstupňovaného tvaru

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že báze sloupců jsou první, druhý a čtvrtý, báze prostoru  $\mathcal{S}(A) = V$  tedy tvoří původní vektory  $v_1 = (3, 1, 5, 4)^T$ ,  $v_2 = (2, 2, 3, 3)^T$  a  $v_4 = (1, 3, 1, 1)^T$ .

Ze třetího sloupce upravené matice dostaneme souřadnice vektoru  $v_3$  vzhledem k bázi  $B = \{v_1, v_2, v_4\}$ , platí

$$v_3 = (1, -1, 2, 1)^T = 1 \cdot (3, 1, 5, 4)^T + (-1) \cdot (2, 2, 3, 3)^T,$$

a tedy  $[v_3]_B = (1, -1, 0)$ .

**Cv. 6.** Rozhodněte, zda platí  $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$  pro  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .  
(*Hint: Jaký je vztah mezi  $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$  a  $\mathcal{S}(A + B)$ ?*)

**Řešení:**

Uvažujme prostor generovaný sjednocením sloupců matice  $A$  a sloupců matice  $B$ , tedy spojení  $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ . Dimenze tohoto prostoru je nanejvýš

$$\dim \mathcal{S}(A) + \dim \mathcal{S}(B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

Dále, prostor  $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$  obsahuje všechny vektory generované sloupci matice  $A + B$ , tedy  $\mathcal{S}(A + B)$  je podprostorem  $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ . Platí proto

$$\text{rank}(A + B) = \dim \mathcal{S}(A + B) \leq \dim \mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

**Cv. 7.** Jaký je vztah mezi prostory  $\text{Ker}(AB)$  a  $\text{Ker}(B)$  pro matice

- (a)  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,
- (b)  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulární,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ?

**Řešení:**

- (a) Nechť  $x \in \text{Ker}(B)$ , pak z definice jádra platí  $Bx = o$ . Vektor  $x$  patří také do jádra matice  $AB$ , protože

$$(AB)x = A(Bx) = Ao = o,$$

dostaneme tedy inkluzi  $\text{Ker}(B) \subseteq \text{Ker}(AB)$ . Obrácená inkluze obecně neplatí, např. pro  $A = 0_n$  a  $B = I_n$  je vektor  $y = (1, 0, \dots, 0)^T$  v jádru matice  $AB$ , ale nikoliv v jádru matice  $B$ .

- (b) Nahlédneme, že pro regulární matici  $A$  platí také inkluze  $\text{Ker}(AB) \subseteq \text{Ker}(B)$ , a tedy  $\text{Ker}(AB) = \text{Ker}(B)$ . Nechť  $x \in \text{Ker}(AB)$ , potom  $(AB)x = o$ . Z regularity matice  $A$  existuje inverzní matice  $A^{-1}$ , pro kterou platí

$$Bx = (A^{-1}A)Bx = A^{-1}((AB)x) = A^{-1}o = o,$$

z čehož plyne  $x \in \text{Ker}(B)$ .