

## Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021):

### (9) Báze, dimenze

Buď  $V$  vektorový prostor nad  $\mathbb{T}$  a mějme vektory  $v_1, \dots, v_n \in V$ .

**Definice 1 (Lineární nezávislost)** Vektory  $v_1, \dots, v_n \in V$  se nazývají lineárně nezávislé, pokud rovnost  $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$  nastane pouze pro  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ . V opačném případě jsou vektory lineárně závislé.

**Definice 2 (Lineární obal)** Lineární obal vektorů  $v_1, \dots, v_n$  je

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T} \right\}.$$

**Definice 3 (Báze)** Vektory  $v_1, \dots, v_n$  tvoří bázi  $V$  pokud jsou lineárně nezávislé a

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = V.$$

**Definice 4 (Dimenze)** Dimenze  $V$  je velikost jeho libovolné báze.

---

**Cv. 1.** Ve vektorovém prostoru  $\mathbb{Z}_5^3$  vyjádřete vektor  $(3, 2, 4)$  jako lineární kombinaci vektorů  $(3, 3, 2)$ ,  $(1, 1, 4)$  a  $(0, 2, 1)$ . Je toto vyjádření jednoznačné?

**Cv. 2.** Doplňte množinu  $M$  na bázi vektorového prostoru  $V$ .

(a)  $M = \{(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T\}$ ,  $V = \mathbb{R}^4$ .

(b)  $M = \{-x^2, x+x^2, x^3-1\}$ , v prostoru  $V$  reálných polynomů stupně nejvýše tři.

**Cv. 3.** Souřadnice vektoru  $u$  vůči uspořádané bázi  $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  jsou  $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ . Určete souřadnice téhož vektoru  $u$  vůči bázi  $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$ .

**Cv. 4.** Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru  $\mathbb{Z}_5^7$ .

(a)  $U = \text{Span}((4, 1, 0, 3, 4, 0, 0)^T, (4, 3, 1, 0, 2, 3, 1)^T, (4, 1, 4, 0, 3, 2, 4)^T, (2, 4, 1, 4, 4, 3, 1)^T, (0, 4, 3, 2, 2, 4, 3)^T)$ .

(b)  $V = \{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0, 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0, 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\}$ .

**Cv. 5.** Rozhodněte, zdali prostory  $U$  a  $V$  z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.