

## Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021):

### (9) Báze, dimenze

Buď  $V$  vektorový prostor nad  $\mathbb{T}$  a mějme vektory  $v_1, \dots, v_n \in V$ .

**Definice 1 (Lineární nezávislost)** Vektory  $v_1, \dots, v_n \in V$  se nazývají lineárně nezávislé, pokud rovnost  $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$  nastane pouze pro  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ . V opačném případě jsou vektory lineárně závislé.

**Definice 2 (Lineární obal)** Lineární obal vektorů  $v_1, \dots, v_n$  je

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T} \right\}.$$

**Definice 3 (Báze)** Vektory  $v_1, \dots, v_n$  tvoří bázi  $V$  pokud jsou lineárně nezávislé a

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = V.$$

**Definice 4 (Dimenze)** Dimenze  $V$  je velikost jeho libovolné báze.

---

**Cv. 1.** Ve vektorovém prostoru  $\mathbb{Z}_5^3$  vyjádřete vektor  $(3, 2, 4)$  jako lineární kombinaci vektorů  $(3, 3, 2)$ ,  $(1, 1, 4)$  a  $(0, 2, 1)$ . Je toto vyjádření jednoznačné?

Řešení:

Vyřešíme soustavu rovnic, která vznikne tak, že vektory  $(3, 3, 2)$ ,  $(1, 1, 4)$  a  $(0, 2, 1)$  dáme do sloupců matice a vektor  $(3, 2, 4)$  použijeme jako vektor pravé strany.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Dostaneme  $x_3 = 2$ ,  $x_2 = p$  a  $x_1 = 1 + 3p$  tedy:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1 + 3p) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Řešení tedy není jednoznačné a vektory  $(3, 3, 2)$ ,  $(1, 1, 4)$  a  $(0, 2, 1)$  netvoří bázi  $\mathbb{Z}_5^3$ .

**Cv. 2.** Doplňte množinu  $M$  na bázi vektorového prostoru  $V$ .

(a)  $M = \{(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T\}$ ,  $V = \mathbb{R}^4$ .

(b)  $M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\}$ , v prostoru  $V$  reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Řešení:

- (a) Prostor  $V$  má dimenzi 4, proto je třeba rozšířit  $M$  o jeden vektor. Z věty o výměně platí, že alespoň jeden z vektorů kanonické báze je nezávislý na vektorech z  $M$ . Nezávislost zjistíme současným vyřešením rovnic  $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = e_i$ , kde  $u_1, u_2, u_3$  jsou vektory z  $M$  a  $e_i$  jsou vektory kanonické báze.

Dostáváme matici

$$\left( \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 6 & -1 \end{array} \right)$$

Protože poslední řádek obsahuje pivot ve všech sloupcích na pravé straně, vidíme, že doplněním o libovolný vektor  $e_i$  se stane množina  $M$  bázi prostoru  $\mathbb{R}^4$ .

- (b) Zkusíme doplnit  $M$  o některý vektor z kanonické báze  $1, x, x^2, x^3$ . Máme matici

$$\left( \begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{ccc|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Zde vidíme, že buď  $M \cup \{1\}$  nebo  $M \cup \{x^3\}$  (a i mnoho jiných možností, které jsme však netestovali) tvoří bázi  $V$ , nikoli však  $M \cup \{x\}$  nebo  $M \cup \{x^2\}$ .

- Cv. 3.** Souřadnice vektoru  $u$  vůči uspořádané bázi  $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  jsou  $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ . Určete souřadnice téhož vektoru  $u$  vůči bázi  $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$ .

**Řešení:**

Hledáme taková  $(b_1, \dots, b_4)^T = [u]_Y$ , aby platilo

$$b_1(v_1 + v_4) + b_2(v_2 + v_3) + b_3v_4 + b_4v_2 = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4.$$

Protože je  $X$  báze, jsou koeficienty u  $v_i$  jsou jednoznačné. Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 + b_4 &= a_2 \\ b_2 &= a_3 \\ b_1 + b_3 &= a_4 \end{aligned}$$

Nové souřadnice jsou  $[u]_Y = (a_1, a_3, a_4 - a_1, a_2 - a_3)^T$ .

- Cv. 4.** Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru  $\mathbb{Z}_5^7$ .

(a)  $U = \text{Span}((4, 1, 0, 3, 4, 0, 0)^T, (4, 3, 1, 0, 2, 3, 1)^T, (4, 1, 4, 0, 3, 2, 4)^T, (2, 4, 1, 4, 4, 3, 1)^T, (0, 4, 3, 2, 2, 4, 3)^T)$ .

(b)  $V = \{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0, 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0, 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\}$ .

**Řešení:**

- (a) Z generátorů sestavíme matici (vektory změňme na řádkové) a tuto matici převedeme na odstupňovaný tvar. Elementární úpravy nemění řádkový prostor, výsledné nenulové řádky tvoří tedy hledanou bázi.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimenze  $U$  je tedy 3 a báze  $U$  je např.  $(1, 2, 3, 2, 2, 4, 3)^T$ ,  $(0, 1, 1, 0, 2, 3, 1)^T$ ,  $(0, 0, 1, 3, 1, 3, 1)^T$ .

- (b) Z rovnic sestavíme soustavu a budeme hledat bázi jejího řešení. Např. pro  $V$  máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

S řešením  $x = p_1(2, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^T + p_2(1, 0, 2, 1, 0, 0, 0)^T + p_3(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)^T + p_4(1, 0, 4, 0, 0, 3, 1)^T$ .

Vektory u parametrů tvoří bázi prostoru řešení, m.j. je okamžitě vidět, že dimenze tohoto prostoru je rovna počtu volných proměnných.

Dimenze  $V$  je tedy 4 a báze  $V$  je např.  $(2, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ ,  $(1, 0, 2, 1, 0, 0, 0)^T$ ,  $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)^T$ ,  $(1, 0, 4, 0, 0, 3, 1)^T$ .

**Cv. 5.** Rozhodněte, zdali prostory  $U$  a  $V$  z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

**Řešení:**

Dimenze podprostoru je menší než dimenze prostoru. Dimenze jsme již určili dříve v předchozím příkladu, můžeme tedy okamžitě vyloučit případ  $V \subset U$ . Zbývá ověřit, zdali jsou prostory v opačné inkluzi, nebo jsou-li inkluzí neporovnatelné. Stačí ověřit, jestli  $\dim(\text{Span}(U \cup V)) = \dim(V) = 4$ .

Popřípadě se také můžeme pokusit vyjádřit vektory báze menšího prostoru jako lineární kombinace větší báze (což je vlastně totéž).

		2	1	0	0	0	0	0
		1	0	2	1	0	0	0
		1	0	1	0	1	0	0
		1	0	4	0	0	3	1
2	2	2	3	1	2	3	2	2
1	0	2	1	0	1	1	0	2
0	3	1	1	0	0	1	3	1

Zde řádky první matice udávají souřadnice vektorů báze  $U$  vůči bázi  $V$  (obě tyto báze jsme si zvolili výše). Všimněte si, že se souřadnice dají snadno určit z 2., 4., 5. a 7. složky vektoru a uvědomte si proč.

Pro rozšíření báze vyjdeme z libovolné báze menšího prostoru a přidáváme vektory z většího, dokud nedostaneme požadovanou dimenzi.

Platí inkluze  $U \subset V$ . Tato inkluze se dá nahlédnout i snáze, protože všechny vektory báze  $U$  splňují rovnice z definice  $V$ .