Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (8) Lineární závislost a nezávislost

Definice 1 (Lineární nezávislost) *Vektory* $v_1, \dots, v_n \in V$ *se nazývají* lineárně nezávislé, *pokud rovnost* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ *nastane pouze pro* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. *V opačném případě jsou vektory* lineárně závislé.

Cv. 1. Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2, 3, -5), (1, -1, 1), (3, 2, -2)$.

(b) $(2, 0, 3), (1, -1, 1), (0, 2, 1)$.

Cv. 2. Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

(a) $\{u, u + v, u + w\}$.

(b) $\{u - v, u - w, v - w\}$.

Cv. 3. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, je Y závislá.

(b) Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.

(c) Je-li X závislá, je Y závislá.

(d) Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.

(e) Je-li Y závislá, je X závislá.

Cv. 4. Rozhodněte, zda vektory $(0, 1, 1, 1)^T, (1, 0, 1, 1)^T, (1, 1, 0, 1)^T, (1, 1, 1, 0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Cv. 5. Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{0\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U, v \in V$.

Cv. 6. Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x - 1, x - 2, 3x\}$.

(b) $\{x^2 + 2x + 3, x + 1, x - 1\}$.

(c) $\{\sin x, \cos x\}$.

(d) $\{\sin(x + 1), \sin(x + 2), \sin(x + 3)\}$.

(e) $\{\ln(x), \log_{10}(x), \log_2(x^2)\}$.