Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (7) Vektorové prostory, podprostory a lineární obal

Cv. 1. Jsou následující struktury vektorové prostory?

(a) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad $\mathbb{N}$,

(b) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad $\mathbb{Q}$,

(c) $(\mathbb{R}^n, \oplus, \otimes)$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi

- $x \oplus y = x + y$,
- $\alpha \otimes x = |\alpha| x$,

(d) $(2^M, \Delta, \circ)$ nad $\mathbb{Z}_2$, kde M je daná množina s operacemi

- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$,
- $0 \circ A = \emptyset$ a $1 \circ A = A$,

(e) $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{T}$, kde $\mathcal{F}$ je množina všech zobrazení $f \colon M \to V$ s M danou množinou a V vektorovým prostorem nad $\mathbb{T}$. Operace jsou definovány standardně, tj.

- $(f + q)(x) = f(x) + g(x)$,
- $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$.

Cv. 2. Dokažte, že v každém vektorovém prostoru V nad $\mathbb{T}$ platí

(a) $0v = 0_V$.

(b) $(-1)v = -v$,

Cv. 3. Rozhodněte, zda následující tvoří podprostory $\mathbb{R}^2$:

(a) $\big\{(s + t, 1)^T \mid s, t \in \mathbb{R}\big\}$,

(b) $\big\{(s, 5s)^T \mid s \in \mathbb{R}\big\}$.

Cv. 4. Ukažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$. Rozmyslete, proč tvrzení pro obecnou pravou stranu neplatí.

Cv. 5. Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí:

(a) $span(span(M)) = span(M)$,

(b) $M \subseteq N \Rightarrow span(M) \Subset span(N)$,

(c) $M \subseteq N \Leftarrow span(M) \Subset span(N)$,

(d) $M \subseteq N \subseteq span(M) \Rightarrow span(M) = span(N)$.

Cv. 6. Uvažme vektorový prostor všech funkcí $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$. Pro $i \in \mathbb{N}$, buď $a_i \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$ funkce definována

$$a_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nechť dále $b \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$ je funkce taková, že $b(i) = 1$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Leží b v lineárním obalu $\langle \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle$?