Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (7) Vektorové prostory, podprostory a lineární obal

Cv. 1. Jsou následující struktury vektorové prostory?

(a) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad $\mathbb{N}$,

(b) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad $\mathbb{Q}$,

(c) $(\mathbb{R}^n, \oplus, \otimes)$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi
- $x \oplus y = x + y$,
- $\alpha \otimes x = |\alpha| x$,

(d) $(2^M, \Delta, \circ)$ nad $\mathbb{Z}_2$, kde M je daná množina s operacemi
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$,
- $0 \circ A = \emptyset$ a $1 \circ A = A$,

(e) $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{T}$, kde $\mathcal{F}$ je množina všech zobrazení $f\colon M \to V$ s M danou množinou a V vektorovým prostorem nad $\mathbb{T}$. Operace jsou definovány standardně, tj.
- $(f + q)(x) = f(x) + g(x)$,
- $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$.

Řešení:

(a) Vektorový prostor je struktura definovaná nad libovolným tělesem $\mathbb{T}$. Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ netvoří těleso (např. neexistují inverzních prvky), proto $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad $\mathbb{N}$ není vektorový prostor.

(b) Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ již těleso tvoří. Protože uvažujeme $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad $\mathbb{Q}$, kde operace sčítání a násobení jsou přejaté z definice pro standardní vektorový prostor, víme, že budou mít stejné vlastnosti a proto je nemusíme testovat. Jediné, co musíme zkontrolovat je uzavřenost na operace násobení skalárem. Protože volíme $\alpha \in \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, plyne uzavřenost na násobení skalárem z uzavřenosti pro skaláry z $\mathbb{R}$. Struktura $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad $\mathbb{Q}$ tedy tvoří vektorový prostor.

(c) Jediný rozdíl mezi $(\mathbb{R}^n, \oplus, \otimes)$ nad $\mathbb{R}$ a standardním vektorovým prostorem $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$ je v operaci násobení, proto stačí otestovat pouze její vlastnostni. Například distributivita $(\alpha + \beta) \otimes u = (\alpha \otimes u) \oplus (\beta \otimes u)$ není splněna pro nenulové $\beta = -\alpha$, neboť

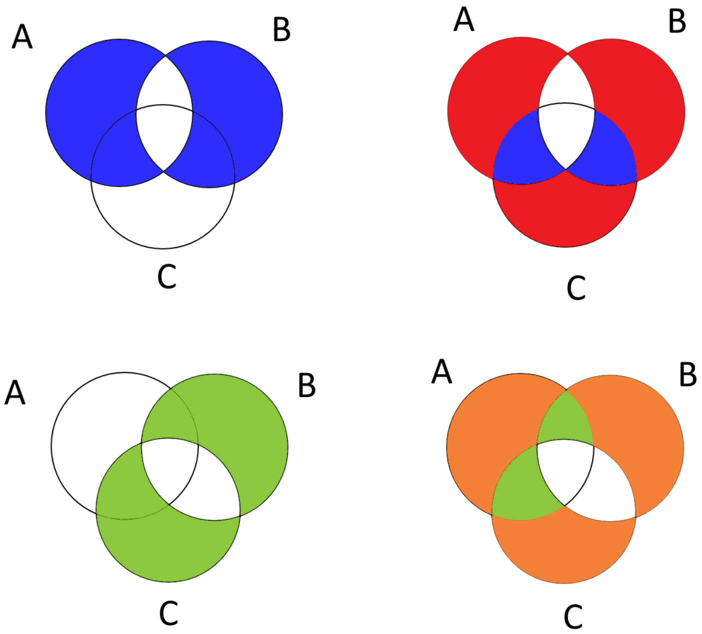
$$(\alpha + \beta) \otimes u = (\alpha - \alpha) u = 0u = 0,$$

ale

$$(\alpha \otimes u) \oplus (\beta \otimes u) = |\alpha| u + |-\alpha| u = 2|\alpha| u.$$

(d) Struktura $\mathbb{Z}_2$ je těleso, obě operace mají správnou signaturu a jistě jsou uzavřené na 2^M (obě operace vrací opět podmnožinu M). Vyšetření vlastností vypadá následovně.

Obrázek 1: (Asociativita Δ): $A\Delta B$, $(A\Delta B)\Delta C$, $B\Delta C$, $A\Delta(B\Delta C)$



i. (Asociativita Δ) Pro snazší nahlédnutí asociativity využijeme diagramů z Obrázku 1. Vidíme, že platí $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

ii. (Neutrální prvek pro Δ) Jako přirozený kandidát se nabízí prázdná množina $\emptyset$. Skutečně $A\Delta\emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$.

iii. (Inverzní prvek pro Δ) Pro inverzní prvek $(-A)$ musí platit $A\Delta(-A) = \emptyset$ tedy hledáme takovou množinu B, že $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$. Vidíme, že výsledek bude prázdná množina, pokud obě množiny $A \setminus B$ a $B \setminus A$ budou prázdné množiny. Z první množiny je patrné, že je prázdná právě tehdy když $A \subseteq B$ a z druhé naopak když $B \subseteq A$. Kombinací dostáváme $B = A$, tedy inverzní prvek $(-A) = A$.

iv. (Komutatitvita Δ) Komutativita Δ plyne z komutativity $\cup$, neboť $A\Delta B = B\Delta A$ je ekvivalentní tomu, že

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B).$$

v. (Asociativita $\circ$) Plyne z asociativity $(\mathbb{Z}_2, \circ)$.

vi. (Vlastnost $1_{\mathbb{Z}_2}$) Plyne přímo z definice $\circ$.

vii. (Distributivita) Protože se pohybujeme nad konečným tělesem, vztah

$$(\alpha + \beta) \circ A = (\alpha \circ A)\Delta(\beta \circ A)$$

můžeme otestovat rozborem případů v závislosti na hodnotách α, β. Pro $\alpha = \beta = 0$, dostáváme:

$$(\alpha + \beta) \circ A = (0 + 0) \circ (A) = 0 \circ A = \emptyset,$$

$$(\alpha \circ A)\Delta(\beta \circ A) = (0 \circ A)\Delta(0 \circ A) = \emptyset\Delta\emptyset = \emptyset.$$

Pro $\alpha = \beta = 1$, dostáváme:

$$(\alpha + \beta) \circ A = (1 + 1) \circ (A) = 0 \circ A = \emptyset,$$

$$(\alpha \circ A)\Delta(\beta \circ A) = (1 \circ A)\Delta(1 \circ A) = A\Delta A = \emptyset.$$

Pro $\alpha = 1$, $\beta = 0$ dostáváme:

$$(\alpha + \beta) \circ A = (1 + 0) \circ (A) = 1 \circ A = A,$$

$$(\alpha \circ A)\Delta(\beta \circ A) = (1 \circ A)\Delta(0 \circ A) = A\Delta\emptyset = A.$$

Případ $\alpha = 0$, $\beta = 1$ plyne z komutativity Δ a $+$. Vztah

$$\alpha \circ (A\Delta B) = (\alpha \circ A)\Delta(\beta \circ B)$$

ukážeme podobnou analýzou v závislosti na hodnotě α. Pro $\alpha = 0$ dostáváme:

$$\alpha \circ (A\Delta B) = 0 \circ (A\Delta B) = \emptyset,$$

$$(\alpha \circ A)\Delta(\alpha \circ B) = (0 \circ A)\Delta(0 \circ B) = \emptyset\Delta\emptyset = \emptyset.$$

Pro $\alpha = 1$ dostáváme:

$$\alpha \circ (A\Delta B) = 1 \circ (A\Delta B) = A\Delta B,$$

$$(\alpha \circ A)\Delta(\alpha \circ B) = (1 \circ A)\Delta(1 \circ B) = A\Delta B.$$

Cv. 2. Dokažte, že v každém vektorovém prostoru V nad $\mathbb{T}$ platí

(a) $0v = 0_V$.

(b) $(-1)v = -v$,

<u>Řešení</u>:

(a) Abychom dokázali tuto vlastnost, využijeme triku a to, že přičteme vektor $0v$ k vektoru αv, kde $\alpha \neq 0$. Z distributivity dostáváme

$$\alpha v + 0v = (\alpha + 0)v = \alpha v.$$

Vidíme, že $0v$ se chová jako neutrální prvek, tedy nutně z jednoznačnost neutárlního prveku $0v = 0_V$.

(b) Stačí ukázat, že $v + (-1)v = 0_V$. To nahládneme následujícím způsobem:

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 - 1)v = 0v = 0.$$

První rovnost platí z vlastnosti prvku 1, druhá z distributivity a třetí z (a).

Cv. 3. Rozhodněte, zda následující tvoří podprostory $\mathbb{R}^2$:

(a) $\big\{(s + t, 1)^T \mid s, t \in \mathbb{R}\big\}$,

(b) $\{(s, 5s)^T \mid s \in \mathbb{R}\}$.

Řešení:

(a) Abychom zkontrolovali, že se skutečně jedná o vektorový podprostor, musí být $\{(s+t, 1)^T \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ podmnožinou $\mathbb{R}^2$ (což zřejmě je) a musí být uzavřená na operace $+$ a $\cdot$. Uvědomte si, že uzavřenost na inverzi a neutrální prvek pro $+$ plyne ze vztahů $-v = -1 \cdot v$ a $0v = 0_V$. Uvedená množina není uzavřená na operaci $+$. Například pro dvojici $(0,1)^T$, $(1,1)^T$ součet $(1,2)^T$ neleží v uvedené množině. O vektorový podprostor se proto nejedná.

(b) Zde už uzavřenost na sčítání platí. Dvojice $(s, 5, s)^T$ a $(t, 5t)^T$ pro $s, t \in \mathbb{R}$ se sečte na $(s+t, 5(s+t))^T$ což je vektor z uvedené množiny. Pokud uvážíme násobení vektoru $(s, 5s)^T$ pro $s \in \mathbb{R}$ skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$, dostáváme vektor $(\alpha t, 5(\alpha t))^T$, který taktéž leží v uvedené množině. Množina je tedy uzavřená na obě operace a proto je vektorovým podprostorem $\mathbb{R}^2$.

Cv. 4. Ukažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$. Rozmyslete, proč tvrzení pro obecnou pravou stranu neplatí.

Řešení:
Stačí ověřit uzavřenost na operace. Pro $y, z \in \mathbb{R}^n$ řešení soustavy $Ax = 0$ dostáváme

$$A(y+z) = Ay + Az = 0 + 0 = 0.$$

Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}^n$ řešení soustavy $Ax = 0$ dostáváme

$$A(\alpha y) = \alpha A y = \alpha 0 = 0.$$

Pokud bychom uvažovali libovolnou pravou stranu $b \neq 0$, poté stejný postup selže, neboť například pro sčítání

$$A(y+z) = Ay + Az = b + b \neq b.$$

Cv. 5. Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí:

(a) $span(span(M)) = span(M)$,

(b) $M \subseteq N \Rightarrow span(M) \Subset span(N)$,

(c) $M \subseteq N \Leftarrow span(M) \Subset span(N)$,

(d) $M \subseteq N \subseteq span(M) \Rightarrow span(M) = span(N)$.

Řešení:

(a) Snadno nahlédneme, že platí $span(M) \subseteq span(span(M))$, neboť každý vektor z $x \in span(M)$ se dá napsat jako triviální lineární kombiance vektorů z $span(span(M))$, tím že zvolíme $1 \cdot x$. Naopak, nechť $y \in span(span(M))$. Podle definice $y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i$ pro $y_i \in span(M)$. Každý $y_i \in span(M)$ se dá z definice zapsat jako $y_i = \sum_{j=1}^{k_i} \beta_j x_{ij}$ pro $x_{ij} \in M$. Pomocí substituce můžeme vyjádřit

$$y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (\sum_{j=1}^{k_i} \beta_j x_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_i \beta_j x_{ij}.$$

Vidíme, že y se dá vyjádřit jako lineární kombinace $x_{ij} \in M$ s koeficienty $\gamma_{ij} = \alpha_i \beta_j$, tedy $y \in span(M)$. Uvedená rovnost proto platí.

(b) Implikace platí, neboť každá lineární kombinace $x \in span(M)$ taková, že $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ pro $x_i \in M$ je obsažena i v $span(N)$, neboť $x_i \in N$.

(c) Neplatí, pokud například $M = span(M) = span(N) \supsetneq N$. Tedy pokud například $M = \mathbb{R}$ a $N = \mathbb{R} \setminus \alpha$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Již víme z (b), že platí inkluze $span(M) \subseteq span(N)$. Protože $N \subseteq span(M)$, víme, že také každé kombinace $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ pro $x_i \in N$ náleží do $span(N)$ (plyne z (a)). Tedy $span(N) \subseteq span(M)$. Tedy uvedená implikace platí.

Cv. 6. Uvažme vektorový prostor všech funkcí $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$. Pro $i \in \mathbb{N}$, buď $a_i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$ funkce definována

$$a_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nechť dále $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$ je funkce taková, že $b(i) = 1$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Leží b v lineárním obalu $\langle \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle$?

Řešení:

Jediný způsob, jak vyjádřit b jako lineární kombinace funkcí a_i pro $i \in \mathbb{N}$ je $b = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i$. Vidíme, že tato lineární kombinace má nekonečně mnoho členů, proto $b \notin \langle \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle$.