3. Operace s maticemi

Cv. 3.1 Spočtěte následující výrazy:

(a) $2A$,

(b) $A+B$,

(c) C^T,

(d) Cv,

(e) BC,

kde

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Řešení:

(a) Pokud matice A je řádu $m\times n$ výsledná matice bude také řádu $m\times n$. Výslednou matici získáme tak, že každou složku matice A násobíme příslušnou konstantou (tj. hodnotou 2). Dostáváme:

$$2A=2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 2\\ 2\cdot 2 & 2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & -2\end{pmatrix}.$$

(b) Abychom mohli sečíst matice A, B musí mít shodné rozměry (všimněme si, že obě jsou shodného řádu 2×2). Výsledná matice bude mít stejné rozměry jako matice A (resp. B), tedy 2×2. Výsledek získáme sčítáním po složkách, tj. každá pozice výsledné matice je součtem hodnot z matice A a B na dané pozici. Dostáváme:

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-1) & 2+(-1)\\ 2+0 & -1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$$

(c) Je-li původní matice rozměrů $m\times n$, transponovaná matice bude mít rozměry $n\times m$. Její prvek na pozici (i,j) je pak roven prvku, který je v původní matici na pozici (j,i). Proto získáváme:

$$C^T=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

(d) Je-li matice C řádu $m\times n$, musí v být n-složkový vektor a výsledkem bude m složkový vektor. V tomto případě je matice C řádu 2×3 a vektor v má 3 složky (řády tedy souhlasí) a výsledkem bude 2-složkový vektor. Výsledný vektor spočteme následovně:

$$Cv=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 3\\ 2\cdot 1+(-2)\cdot 2+0\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ -2\end{pmatrix}.$$

Na násobení jsme mohli také pohlížet jako na násobení matice C řádu 2×3 s maticí odpovídající vektoru v řádu 3×1.

(e) Je-li matice B řádu $m \times n$ musí být matice C řádu $n \times \ell$ a výsledná matice bude řádu $m \times \ell$. V tomto případě je matice B řádu 2×2 a matice C řádu 2×3 (tedy řády souhlasí) a výsledná matice bude řádu 2×3. Výslednou matici spočteme následovně:

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3 + (-1)\cdot 2 & (-1)\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) & (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \\ 0\cdot 3 + 3\cdot 2 & 0\cdot 0 + 3\cdot(-2) & 0\cdot 1 + 3\cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cv. 3.2 Mějme A, b definované jako

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ověřte pomocí maticového násobení, zda jsou vektory $x = (0,1,2)^T$, $y = (0,-1,2)^T$ řešením soustavy $Ax = b$.

<u>Řešení</u>:
Násobením Ax dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Násobením Ay dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vektor x tedy řešením soustavy není, zatímco vektor y ano.

Cv. 3.3 Najděte příklad nekomutativnosti násobení čtvercových matic 2×2.

<u>Řešení</u>:
Toto je kreativní příklad. V zásadě skoro každé dvě netriviální matice splní zadání. Například:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3.4 Dokažte pro $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z definice:

(a) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,

(b) $A(B + C) = AB + AC$,

(c) $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Řešení:
Rovnost $X = Y$ dvojice matic $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí, pokud si jsou rovny všechny jejich prvky. Ve všech podúlohách proto otestujeme pro libovolnou dvojici indexů i, j rovnost $X_{ij} = Y_{ij}$.

(a) Z definice násobení skalárem a maticového násobení vyjádříme

- $(\alpha(AB))_{ij} = \alpha(AB)_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}$,
- $((\alpha A)B)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\alpha A)_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^n \alpha A_{ik}B_{kj}$,
- $(A(\alpha B))_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}(\alpha B)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik}\alpha B_{kj}$.

Z vlastností komutativity a distributivity reálných čísel vyplývá vzájemná rovnost všech tří výrazů.

(b) Z definice násobení vyjádříme

$$(A(B+C))_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik}(B_{kj} + C_{kj})$$

a

$$(AB + AC)_{ij} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^n A_{ik}C_{kj}.$$

Roznásobením členů sumy v prvním výrazu a jejich přeuspořádáním můžeme rozdělit výraz na dvě sumy odpovídající druhému výrazu.

(c) Z definice transpozice a sčítání matic vyjádříme

$$((A+B)^T)_{ij} = (A+B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$$

a

$$(A^T + B^T)_{ij} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} = a_{ji} + b_{ji}.$$

Cv. 3.5 Dokažte:

(a) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$,

(b) $A^T A$ je symetrická matice pro každé $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Řešení:

(a) Z přednášky víme, že $(AB)^T = B^T A^T$. Tuto vlastnost využijeme dvakrát a vyjádříme
$$((AB)C)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T.$$

(b) Matice M je symetrická, pokud $M^T = M$. Ověříme tedy tuto vlastnost pro matici $M = A^T A$. Odvodíme $M^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = M$, což dokazuje požadovanou symetrii.

Cv. 3.6 Buď A matice řádu 10×5, B matice řádu 5×20 a C matice řádu 20×1. Jak co nejefektivněji (co do počtu aritmetických operací) spočítat součin ABC?

Řešení:
Na vynásobení dvou obecných matic $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$ je třeba $m \cdot p$ skalárních součinů ve tvaru $(XY)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} X_{ik}Y_{kj}$. V rámci každého je třeba provést n násobení (za každý člen sumy) a $n-1$ součtů. Celkově tedy provedeme $mp(2n-1)$ aritmetických operací. Při násobení v pořadí $(AB)C$ nejprve vynásobíme AB, což stojí

$$10 \cdot 20 \cdot (2 \cdot 5 - 1) = 1800 \text{ operací.}$$

Matice AB má rozměr 10×20. Násobení $(AB)C$ proto stojí dalších

$$10 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 20 - 1) = 390 \text{ operací.}$$

Celkem tedy násobení v pořadí $(AB)C$ stojí 2190 aritmetických operací.

Oproti tomu, násobení BC stojí

$$5 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 20 - 1) = 195 \text{ operací}$$

a $A(BC)$ stojí dalších

$$10 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 5 - 1) = 90 \text{ operací.}$$

Celkem tedy násobení v pořadí $A(BC)$ stojí 285 aritmetických operací, což je podstatně méně, než v prvním případě.

Poučení: I když je násobení matic asociativní, a tudíž na uzávorkování nezáleží matematicky, tak na něm záleží výpočetně.

Cv. 3.7 Pro $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ určete následující.

(a) $A(\alpha e_i)$
(b) $A(e_i + e_j)$
(c) $(\alpha e_i)^T A$
(d) $(e_j + e_j)^T A$
(e) $e_i^T A e_j$
(f) $x^T A y$

Řešení:

(a) Z vlastnosti součinu můžeme upravit $A(\alpha e_i) = \alpha(Ae_i)$. Výraz $A(\alpha e_i)$ tedy odpovídá α-násobku i-tého sloupce A_{*i}. Pro $\alpha = 1$ tak dostaneme známé trvzení $Ae_i = A_{*i}$.

(b) Opět nejprve upravíme $A(e_i + e_j) = Ae_i + Ae_j$. Výraz $A(e_i + e_j)$ tedy odpovídá součtu i-tého a j-tého sloupce $A_{*i} + A_{*j}$.

(c) Z vlastnosti součinu můžeme upravit $(\alpha e_i)^T A = \alpha(e_i^T A)$. Výraz $(\alpha e_i)^T A$ tedy odpovídá α-násobku i-tého řádku A_{i*}. Pro $\alpha = 1$ tak dostaneme známé trvzení $e_i^T A = A_{i*}$.

(d) Opět nejprve upravíme $(e_j + e_j)^T A = e_j^T A + e_j^T A$. Výraz $(e_j + e_j)^T A$ tedy odpovídá součtu j-tého a j-tého řádku $A_{j*} + A_{j*}$.

(e) Aplikací předchozích vztahu postupným násobením dostáváme $(e_i^T A)e_j = A_{i*}e_j = A_{ij}$. Výraz $e_i A e_j$ tedy odpovídá výběru prvku a_{ij}.

(f) Využijeme všech předchozích vztahů a faktu, že vektory x, y můžeme vyjádřit jako kombinace $x = x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_me_m$ a $y = y_1e_1+y_2e_2+\ldots+y_ne_n$. Poté

$$x^T Ay = (x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_me_m)^T A(y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n).$$

Z distributivity, asociativity a vztahu $e_i^T Ae_j$ postupně dostáváme

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_ie_j)^T A(y_je_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_iy_je_i^T Ae_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jA_{ij}.$$

Cv. 3.8 Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Řešení:

(a) Vynásobení i-tého řádku skalárem $\alpha \neq 0$ můžeme zapsat pomocí matice

$$E_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici (i, i) zaměníme 1 za α. Násobením touto maticí **zleva** násobíme i-tý řádek konstantou α.

To můžeme ověřit z definice násobení. Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je libovolná matice a $E_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je matice popsaná výše. Potom pro libovolný řádek $j \in \{1, \ldots, m\}$ a sloupec $k \in \{1, \ldots, n\}$ matice $E_i(\alpha)A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí:

$$\begin{aligned} (E_i(\alpha)A)_{jk} &= \sum_{\ell}(E_i(\alpha))_{j\ell}A_{\ell k} \\ &= (E_i(\alpha))_{jj}A_{jk} && ((E_i(\alpha))_{j\ell} \neq 0 \text{ pouze pro } \ell = j) \\ &= \begin{cases} A_{jk} & \text{pro } j \neq i \\ \alpha A_{jk} & \text{pro } j = i \end{cases} && (\text{dosadíme za } (E_i(\alpha))_{jj}) \end{aligned}$$

Vidíme, že $E_i(\alpha)A$ má všechny řádky kromě i-tého shodné s maticí A a i-tý řádek je vynásoben skalárem α.

(b) Přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, kde $i \neq j$. Můžeme zapsat pomocí matice

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & j & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici (i, j) zaměníme nulu za α. Násobením touto maticí **zleva** přičítáme α-násobek j-tého řádku k i-tému.

Ověření provedeme z definice násobení matic. Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je libovolná matice a $E_{ij}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je matice popsaná výše. Potom pro libovolný řádek $k \in \{1, \dots, m\}$ a sloupec $h \in \{1, \dots, n\}$ matice $E_{ij}(\alpha)A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí:

$$\begin{aligned}
(E_{ij}(\alpha)A)_{kh} &= \sum_{\ell} (E_{ij}(\alpha))_{k\ell} A_{\ell h} \\
&= \begin{cases} (E_{ij}(\alpha))_{kk} A_{kh} & \text{pro } k \neq i \\ (E_{ij}(\alpha))_{kk} A_{kh} + (E_{ij}(\alpha))_{kj} A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \\
&\qquad \text{(pro ostatní hodnoty } m \text{ je } (E_{ij}(\alpha))_{k\ell} = 0) \\
&= \begin{cases} A_{kh} & \text{pro } k \neq i \\ A_{kh} + \alpha A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \\
&\qquad \text{(dosadíme příslušné hodnoty z matice } E_{ij}(\alpha))
\end{aligned}$$

Vidíme, že všechny řádky kromě i-tého zůstaly zachovány a k i-tému řádku jsme přičetli α násobek j-tého řádku.

(c) Prohození i-tého a j-tého řádku můžeme zapsat pomocí matice

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a prohodíme její i-tý a j-tý řádek. Násobením touto maticí **zleva** prohazujeme i-tý a j-tý řádek.

Ověření zase provedeme z definice násobení. Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je libovolná matice $E_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je matice popsaná výše. Potom pro libovolný řádek

$k \in \{1, \ldots, m\}$ a sloupec $h \in \{1, \ldots, n\}$ matice $E_{ij}A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí:

$$
\begin{aligned}
(E_{ij}A)_{kh} &= \sum_\ell (E_{ij})_{k\ell} A_{\ell h} \\
&= \begin{cases} (E_{ij})_{kk}A_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ (E_{ij})_{ki}A_{ih} & \text{pro } k = j \\ (E_{ij})_{kj}A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad \text{(pro ostatní hodnoty } \ell \text{ je } (E_{ij})_{k\ell} = 0) \\
&= \begin{cases} A_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ A_{ih} & \text{pro } k = j \\ A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad \text{(dosadíme příslušné hodnoty z matice } (E_{ij}))
\end{aligned}
$$

Vidíme, že $(E_{ij})A$ má všechny řádky kromě i-tého a j-tého shodné s maticí A a i-tý a j-tý řádek jsou prohozeny.

Cv. 3.9 Co dělají matice elementárních řádkových úprav při násobení matice A zprava?

Řešení:

K odpovědi bychom mohli dojít několika způsoby. Jedna možnost by byla vynásobit postupně matici A maticemi elementárních řádkových úprav zprava a zanalyzovat výsledek. My však využijeme toho, že víme, co se děje při násobení maticemi elementárních řádkových úprav zleva a vlastností transpozice matic. Pokud je E jedna z matic úprav, dostáváme

$$(AE)^T = E^T A^T.$$

Na tento vztah se dá nahlížet tak, že sloupce AE odpovídají řádkům $E^T A^T$. Z definice matic elementárních řádkových úprav je snadné nahlédnout, jak vypadají jejich transpozice. Konkrétně

- $(E_i(\alpha))^T = E_i(\alpha)$,
- $(E_{ij}(\alpha))^T = E_{ji}(\alpha)$,
- $(E_{ij})^T = E_{ij}$.

Zatímco pro první a třetí úpravu je transpozice rovna původní matici, pro přičtení α-násobku j-tého řádku i i-tému se transpozicí změní na příčtení α-násobku i-tého řádku k j-tému.

Vidíme tedy, že $E^T A^T$ odpovídá provádění elementárních řádkových úprav na řádky matice A^T, které odpovídají sloupcům matice A. Kombinací všech těchto pozorování dostáváme následující závěr.

(a) Sloupce $AE_i(\alpha)$ odpovídají řádkům $E_i(\alpha)A^T$. Aplikací této úpravy zprava vynásobíme i-tý sloupec matice A skalárem α.

(b) Sloupce $AE_{ij}(\alpha)$ odpovídají řádkům $E_{ji}(\alpha)A^T$. Aplikací této úpravy přičteme α-násobek i-tého sloupce k j-tému sloupci matice A.

(c) Sloupce AE_{ij} odpovídají řádkům $E_{ij}A^T$. Aplikací této úpravy zprava prohodíme i-tý a j-tý sloupec matice A.

Cv. 3.10 Spočtěte hodnost následujících matic.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$,

(b) $A = ab^T$, kde $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Řešení:

(a) K výpočtu hodnosti je možné využít Gaussovu eliminaci. Vidíme, že druhý řádek je fakticky 3-násobek prvního. Proto po jednom kroku eliminace, kdy přičteme (-3)-násobek prvního řádku k druhému dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta je již v REF tvaru a její hodnost je 1.

(b) Pro určení hodnosti matice je dobré si uvědomit, jak matice vypadá. Platí, že $(ab^T)_{ij} = a_i b_j$, explicitně

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} — & a_1b^T & — \\ — & a_2b^T & — \\ — & a_3b^T & — \\ & \vdots & \\ — & a_nb^T & — \end{pmatrix}.$$

Řádky matice ab^T jsou jen násobky vektoru b^T. Mohou tedy nastat pouze dvě situace. Pokud $a = 0$ nebo $b = 0$, triviálně $\operatorname{rank}(ab^T) = 0$. V opačném případě existuje aspoň jedno $a_i \neq 0$ a všechny řádky matice jsou násobky i-tého řádku. Podobně jako v předchozí úloze je tedy $\operatorname{rank}(ab^T) = 1$.