1. Analytická geometrie a motivace k soustavám rovnic

Cv. 1.1 Vyjmenujte co nejvíce způsobů, jakými lze zadat přímku v prostoru. Diskutujte předpoklady a omezení jednotlivých přístupů.

Řešení:
Možností je celá řada:

- *Bod a směrnice přímky.* Bod může být libovolný bod na přímce, směrnice je libovolný nenulový vektor.
- *Dva body na přímce.* Libovolné, ale různé, body na přímce.
- *Dvě rovnice.* Dvě rovnice musí popisovat různé roviny, to znamená, že jedna nesmí být násobkem druhé. Navíc jejich normály nesmí být nulové vektory, jinak by rovnice nepopisovala rovinu.

Cv. 1.2 Najděte rovnicové vyjádření roviny, která je popsána bodem $[3, 2, 1]$ a směrnicemi $(1, 1, 1)$, $(2, -1, 0)$.

Řešení:
Normálu získáme například vektorovým součinem směrnic $(1, 1, 1) \times (2, -1, 0) = (1, 2, -3)$. Rovnice má tudíž tvar $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = d$. Absolutní člen d určíme ze znalosti bodu roviny, tedy $d = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4$. Rovnice tak je

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4.$$

Pokud se chceme vyhnout použití vektorového součinu (nebo jej neznáme), budeme uvažovat normálu v obecném tvaru (a, b, c) a rovnici tak ve tvaru $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$. Protože rovina obsahuje bod $[3, 2, 1]$, dostáváme rovnici

$$3a + 2b + c = d.$$

Jelikož rovina má směrnice $(1, 1, 1), (2, -1, 0)$, které musí být kolmé na normálu, dostáváme další dvě rovnice

$$a + b + c = 0, \quad 2a - b = 0.$$

Celkem tak máme 3 rovnice o 4 neznámých. To není překvapivé, protože výsledná rovnice není jednoznačná – můžeme uvažovat její libovolný násobek. Každopádně vyřešením soustavy dostaneme jako řešení $a = t$, $b = 2t$, $c = -3t$, $d = 4t$, kde $t \in \mathbb{R}$ je libovolné. Zvolíme například $t = 1$ (nebo jakékoli jiné nenulové t) a máme jako řešení rovnici

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4.$$

Na závěr doporučujeme udělat zpětnou zkoušku dosazením bodu a směrnic!

Cv. 1.3 Najděte parametrické vyjádření roviny $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$.

Řešení:

Jeden bod roviny najdeme tak, že zvolíme libovolně hodnotu dvou složek a dopočítáme tu zbylou. Například zvolme $x_2 = x_3 = 0$ a z rovnice dostaneme $x_1 = 2$. Tudíž máme bod $[2, 0, 0]$.

Směrnice získáme jako dva různé vektory (jeden nesmí být násobkem druhého), kolmé na normálu $(2, 3, 1)$. Můžeme to snadno uhádnout a zvolit například $(0, 1, -3)$ a $(1, 0, -2)$. Kdo to nevidí hned, uvědomí si, že směrový vektor (a, b, c) musí být kolmý na normálu, tj. $2a + 3b + c = 0$. Z této rovnice najdeme dvě různá řešení. Například dosadíme $a = 0, b = 1$ a dopočítáme $c = -3$, a jako druhé řešení dosadíme $a = 1, b = 0$ a dopočítáme $c = -2$. Opět musíme být trochu opatrní, aby směrnice neudávali stejný směr.

Cv. 1.4 Určete parametrický popis přímky, zadané dvěma rovnicemi:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \quad 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3.$$

Řešení:

V zásadě vyřešíme soustavu rovnic a vyjádříme řešení pomocí parametru t.

Například eliminací proměnné x_1 dostaneme rovnici $x_2 + x_3 = 1$. Zvolíme $t = x_3$ jako parametr a pomocí něj vyjádříme ostatní proměnné. Z rovnice $x_2 + x_3 = 1$ odvodíme $x_2 = 1 - x_3 = 1 - t$. Z původní rovnice $x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$ vyjádříme $x_1 = 2 - 3x_2 - x_3 = 2 - 3(1 - t) - t = -1 + 2t$.

Výsledek: $[x_1, x_2, x_3] = [-1 + 2t, 1 - t, t] = [-1, 1, 0] + t(2, -1, 1)$. To jest, přímka prochází bodem $[-1, 1, 0]$ a má směrnici $(2, -1, 1)$.

Cv. 1.5 Najděte dvě rovnice, popisující přímku $[3, 2, 1] + t(1, -1, 1)$.

Řešení:

Každá rovnice musí vyhovovat bodu $[3, 2, 1]$ a její normála musí být kolmá na směrnici $(1, -1, 1)$. Navíc dvě výsledné rovnice musí popisovat odlišné roviny, tedy nesmí být až na násobek stejné.

Zvolme normálu například $(1, 1, 0)$, ta je kolmá na směrnici. Normále odpovídá rovnice $x_1 + x_2 = d$ a ze znalosti bodu $[3, 2, 1]$ odvodíme $d = 5$. Nyní zvolme jinou normálu, například $(0, 1, 1)$, která je též kolmá na směrnici. Ta odpovídá rovnici $x_2 + x_3 = d'$ a ze znalosti bodu $[3, 2, 1]$ odvodíme $d' = 3$. Tudíž výsledkem jsou rovnice $x_1 + x_2 = 5$, $x_2 + x_3 = 3$.

Poznamenejme, že řešení není jednoznačné. V druhém kroku jsme mohli zvolit normálu $(1, 0, -1)$, která vede na rovnici $x_1 - x_3 = 2$. Tudíž rovnice $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 - x_3 = 2$ dávají také správné řešení.

Dále ještě podotkněme, že dvě rovnice stačí. Pokud bychom k rovnicím $x_1 + x_2 = 5$, $x_2 + x_3 = 3$ přidali ještě rovnici $x_1 - x_3 = 2$, tak soustava $x_1 + x_2 = 5$, $x_2 + x_3 = 3$, $x_1 - x_3 = 2$ sice stále popisuje zadanou přímku, ale třetí rovnice je redundantní. Vskutku, čtenář jistě snadno ověří, že je rozdílem první a druhé rovnice.

Cv. 1.6 Určete všechny možné vzájemné polohy dvou přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$. Dále, popište, jak lze dané polohy zjistit, pokud jsou obě přímky definovány parametricky nebo rovnicemi.

Řešení:

Možné polohy přímek:

- *Rovnoběžné.*

  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky je násobkem směrového vektoru druhé přímky, ale přímky nemají průsečík.

  Rovnicově: Všechny normály jsou v jedné rovině, tj. každou normálu můžeme vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, žádný bod nevyhovuje všem rovnicím naráz.

- *Totožné.*

  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky je násobkem směrového vektoru druhé přímky a navíc přímky mají průsečík.

  Rovnicově: Všechny normály jsou v jedné rovině, tj. každou normálu můžeme vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, aspoň jeden bod vyhovuje všem rovnicím naráz.

- *Různoběžné.*

  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky není násobkem směrového vektoru druhé přímky a přímky mají průsečík.

  Rovnicově: Aspoň jednu normálu nemůžeme vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, aspoň jeden bod vyhovuje všem rovnicím naráz.

- *Mimoběžné.*

  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky není násobkem směrového vektoru druhé přímky a přímky nemají průsečík.

  Rovnicově: Aspoň jednu normálu nemůžeme vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, žádný bod nevyhovuje všem rovnicím naráz.

Cv. 1.7 Určete vzájemnou polohu dvou přímek, zadaných bodem a směrnicí

$$p : [1, 5, 3],\ (1, -2, -2), \quad q : [3, 1, -1],\ (-1, 2, 2).$$

Řešení:

Protože jsou směrnice až na násobek stejné, jsou přímky rovnoběžné nebo totožné. Snadno ověříme, že bod $[1, 5, 3]$ přímky p leží na přímce q, neboť $[1, 5, 3] = [3, 1, -1] + t(-1, 2, 2)$ pro $t = 2$. Tudíž jsou přímky totožné.

Cv. 1.8 Najděte kvadratickou funkci, procházející body $[1, 1]$, $[2, 2]$, $[3, 7]$.

Řešení:

Kvadratická funkce má tvar $y = ax^2 + bx + c$. Dosazením třech bodů dostáváme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$a + b + c = 1,\ 4a + 2b + c = 2,\ 9a + 3b + c = 7,$$

z čehož vypočítáme $a = 2$, $b = -5$, $c = 4$. Výsledná funkce tudíž je

$$y = 2x^2 - 5x + 4.$$

2. Soustavy lineárních rovnic

Cv. 2.1 Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6, \\ -3x_1 + x_2 &= 2, \end{aligned}$$

a vyřešte soustavu Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací.

Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (tzv. řádkový pohled). Dále vyjádřete pravou stranu soustavy jako kombinaci sloupců matice soustavy (tzv. sloupcový pohled).

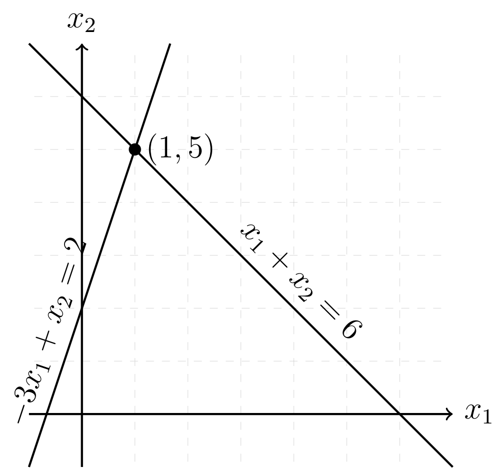
Řešení:

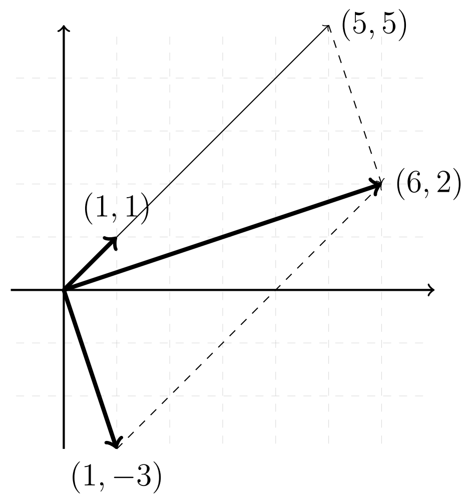
Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Aplikací elementárních řádkových úprav snadno nalezneme řešení $(x_1, x_2) = (1, 5)$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$





Rovnice $x_1 + x_2 = 6$ a $-3x_1 + x_2 = 2$ popisují dvě přímky v rovině, řešení soustavy $(1, 5)$ je jejich průsečíkem.

Sloupce rozšířené matice soustavy můžeme zakreslit jako vektory v rovině. Řešení soustavy pak říká, že vektor pravých stran $(6, 2)$ dostaneme sečtením (1-krát prodlouženého) vektoru $(1, -3)$ a 5-krát prodlouženého vektoru $(1, 1)$.

Cv. 2.2 Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnost matic. Na závěr udělejte zkoušku řešení.

$$\text{(a)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right), \quad \text{(b)} \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right), \quad \text{(c)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Řešení:

(a) Aplikací elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy do odstupňovaného tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & -10 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -20 & -30 \end{array}\right).$$

Zpětnou substitucí získáme jediné řešení soustavy $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$. Alternativně můžeme také použít Gaussovu–Jordanovu eliminaci a převést matici do redukovaného odstupňovaného tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Hodnost matice je daná počtem nenulových řádků (počtem pivotů) odstupňovaného tvaru. V tomto případě platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b) = 3$.

Dosazením ověříme, že vektor $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ opravdu vyhovuje soustavě (ale už neověříme, zda potenciálně neexistuje nějaké další řešení).

(b) Opět upravíme matici pomocí elementárních řádkových úprav:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 7 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Poslední řádek upravené matice reprezentuje rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5$, soustava tedy nemá řešení.

Vidíme, že se v posledním sloupci upravené matice nachází pivot a hodnost rozšířené matice soustavy je $\operatorname{rank}(A \mid b) = 3$, zatímco $\operatorname{rank}(A) = 2$.

(c) Aplikací elementárních úprav převedeme matici na tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nyní použijeme zpětnou substituci. Z druhého řádku vyjádříme $x_2 = 3 - 2x_3$, přičemž volnou proměnnou x_3 ponecháme jako parametr. Nakonec z prvního řádku dostaneme $x_1 = 1 + x_3$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_3,\ 3 - 2x_3,\ x_3) = (1, 3, 0) + x_3 \cdot (1, -2, 1).$$

Geometricky množina řešení tvoří přímku, která prochází bodem $(1, 3, 0)$ a má směrnici $(1, -2, 1)$.

V tomto případě opět platí $\text{rank}(A) = \text{rank}(A \mid b) = 2$, ale zároveň je $\text{rank}(A)$ menší než počet proměnných.

Dosazením například pro $x_3 = 0$ a $x_3 = 1$ ověříme, že vektory $(1, 3, 0)$ a $(2, 1, 1)$ vyhovují soustavě, a tím pádem jí vyhovují všechny na přímce (opět tím ale neověříme, zda neexistuje nějaké ještě jiné řešení).

Cv. 2.3 Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

<u>Řešení:</u>

Různé odstupňované tvary se odlišují počtem a pozicí pivotů. Matice 3×4 v odstupňovaném tvaru může mít 0 až 3 pivoty (v každém řádku a sloupci nanejvýš 1). Pro matici hodnosti r se pivoty vždy nachází postupně v prvních r řádcích odstupňovaného tvaru, stačí proto uvažovat umístění pivotů do různých sloupců. Pro matici 3×4 můžeme najít následujících 15 různých odstupňovaných tvarů:

- jeden odstupňovaný tvar s 0 pivoty (nulová matice):

$$\left(\begin{smallmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right),$$

- 4 odstupňované tvary s 1 pivotem:

$$\left(\begin{smallmatrix} \bullet&-&-&-\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&\bullet&-&-\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&\bullet&-\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0&\bullet\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right),$$

- 6 odstupňovaných tvarů se 2 pivoty:

$$\left(\begin{smallmatrix} \bullet&-&-&-\\ 0&\bullet&-&-\\ 0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \bullet&-&-&-\\ 0&0&\bullet&-\\ 0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \bullet&-&-&-\\ 0&0&0&\bullet\\ 0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&\bullet&-&-\\ 0&0&\bullet&-\\ 0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&\bullet&-&-\\ 0&0&0&\bullet\\ 0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&\bullet&-\\ 0&0&0&\bullet\\ 0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right),$$

- 4 odstupňované tvary se 3 pivoty:

$$\left(\begin{smallmatrix} \bullet&-&-&-\\ 0&\bullet&-&-\\ 0&0&\bullet&- \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \bullet&-&-&-\\ 0&\bullet&-&-\\ 0&0&0&\bullet \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \bullet&-&-&-\\ 0&0&\bullet&-\\ 0&0&0&\bullet \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&\bullet&-&-\\ 0&0&\bullet&-\\ 0&0&0&\bullet \end{smallmatrix}\right).$$

Obecně, matice $n \times n$ může mít 0 až n pivotů, v každém z n sloupců se pivot buď nachází (v prvním řádku, který je dosud bez pivota), nebo nenachází, dostaneme tedy 2^n možných různých odstupňovaných tvarů. Alternativně, pro $k \in \{0, \ldots, n\}$ pivotů máme $\binom{n}{k}$ možných rozmístění do n sloupců, tj. celkem $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ odstupňovaných tvarů.

Cv. 2.4 Nechť matice A je v odstupňovaném (tj. REF) tvaru. Diskutujte, které podmatice A jsou také v REF a které už být nemusí.

<u>Řešení:</u>

Z matice A můžeme odstranit libovolný řádek nebo více řádků a podmínky na REF tvar zůstanou zachovány, čili tato operace zachovává vlastnost být v odstupňovaném tvaru.

Libovolný sloupec vynechat nemůžeme, například odstraněním prvního sloupce z matice $\left(\begin{smallmatrix} 1&0\\ 0&1 \end{smallmatrix}\right)$ dostaneme matici, která v REF tvaru není. Můžeme ale odstranit jakékoli nebázické sloupce (tj. ty bez pivota) a také libovolné sloupce zprava.

Cv. 2.5 Známe elementární řádkové úpravy. Které řádkové úpravy ale jsou „nesprávné“?

Řešení:

Například vynásobení řádku nulou. Nebo odečtení řádku od sebe sama. Nebo odečtení naráz dvou řádků navzájem od sebe (čili děláme najednou dvě úpravy; každá z nich je v pořádku, ale musíme je vykonat postupně).

Cv. 2.6 Najděte soustavu 3 lineárních rovnic o 4 proměnných s řešením

(a) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t \cdot (-2, 1, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$

(b) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 3, 4) + t \cdot (-2, 1, 0, 0) + s \cdot (0, 0, 1, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}.$

Řešení:

Toto je kreativní příklad, možných soustav $(A \mid b)$ je bezpočet a lze k nimi dospět různými úvahami.

(a) Protože je množinou řešení přímka, musíme sestavit alespoň 3 rovnice. Dále si uvědomíme, že mezi řešeními je nulový vektor (volbou $t := 0$), tudíž musí být pravá strana nulová, čili $(b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0)$. Protože řešení splňuje $x_3 = x_4 = 0$, třetí a čtvrtý sloupec matice A mohou obsahovat libovolné hodnoty. A konečně, protože $x_1 = -2x_2$, musí být první sloupec matice A polovinou druhého sloupce.

Hledanou soustavou tak může být například

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Analogicky jako v předchozím případě sestavíme matici A. Vektor b dopočítáme tak, aby $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 3, 4)$ bylo řešením rovnic. Můžeme vzít například

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 2.7 Najděte konkrétní matici A takovou, aby počet řešení soustavy $(A \mid b)$ byl:

(a) ∞ pro každé b,

Řešení:

Například $A = (1\,1)$. Dané podmínce vyhovují právě matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, splňující vztah $\operatorname{rank}(A) = m < n$.

(b) 1 pro každé b,

Řešení:

Například $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dané podmínce vyhovují právě matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, splňující vztah $\operatorname{rank}(A) = m = n$.

(c) 0 nebo 1, v závislosti na b,

Řešení:

Například $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dané podmínce vyhovují právě matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, splňující vztah $\operatorname{rank}(A) = n \le m$.

(d) 0 nebo ∞, v závislosti na b.

Řešení:
Například $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dané podmínce vyhovují právě matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, splňující vztah $\operatorname{rank}(A) < \min\{m, n\}$.

Cv. 2.8 Vyřešte soustavu lineárních rovnic $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Řešení:

V zásadě aplikujeme standardní postup Gaussovy eliminace, i když u těchto typů příkladů je občas výhodnější k odstupňovanému tvaru matice dospět jinou sérií elementárních úprav.

Nejprve přičteme první řádek ke všem ostatním:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & & \vdots & 1 \\ -1 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & -1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Nyní druhý řádek přičteme ke všem, co se nachází pod ním:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Tento postup opakujeme, dokud nedospějeme k matici v odstupňovaném tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2^{n-1} \end{array}\right).$$

Z pravé strany matice vyčteme řešení $x = (x_1, \dots, x_n) = (1, 2, 4, \dots, 2^{n-1})$.

Tento příklad ilustruje ještě jednu vlastnost Gaussovy eliminace a obecně řešení soustav rovnic. Vstupní hodnoty jsou malá celá čísla, pouze 0, 1 a -1. Nicméně během úprav matice, stejně jako na výstupu jako řešení, jsme dostali některá čísla exponenciálně velká (konkrétně 2^{n-1}). S touto vlastností musíme počítat mj. při návrhu a implementaci numerických metod na řešení (potenciálně hodně velkých) soustav rovnic. Velká čísla nebo čísla velmi blízko nuly totiž zhoršují numerické vlastnosti řešení (zaokrouhlovací chyby během výpočtu mohou narůstat).

Cv. 2.9 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right).$$

Řešení:

Pomocí Gaussovy eliminace převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

Hodnota v matici na pozici $(3,3)$ je $2-a-a^2 = (1-a)(a+2)$ a v závislosti na hodnotě parametru a může být někdy nulová. Proto musíme provést následující rozbor případů:

- „Případ $a = -2$.“ Poslední řádek odpovídá rovnici $(1-a)(a+2)x_3 = 1-a$, neboli $0 \cdot x_3 = 3$. V tomto případě řešení neexistuje.
- „Případ $a = 1$.“ Poslední řádek odpovídá rovnici $(1-a)(a+2)x_3 = 1-a$, neboli $0 \cdot x_3 = 0$. Předchozí řádek je také nulový. Tudíž zbývá jediná rovnice, a to první, která má tvar $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. V tomto případě je množina řešení nekonečná a je tvaru
$$(1 - x_2 - x_3,\, x_2,\, x_3), \quad \text{kde } x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$
- „Případ $a \notin \{-3, 1\}$.“ Nyní je hodnota v matici na pozici $(3,3)$ nenulová a jedná se o pivota. Zpětnou substitucí tedy dopočítáme jednoznačné řešení
$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\tfrac{1}{a+2}, \tfrac{1}{a+2}, \tfrac{1}{a+2}\right).$$

Cv. 2.10 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s různými pravými stranami:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

To jest, vyřešte tři soustavy $(A \mid b_i)$ pro $i = 1, 2, 3$. Navrhněte co nejefektivnější způsob!

Řešení:

Jelikož lze pro všechny tři soustavy použít Gaussovu eliminaci se stejnou sérií elementárních řádkových úprav, můžeme uvažovat všechny tři pravé strany najednou a aplikovat eliminaci na matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & 3 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & 3 & -15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & -14 & 14 & 0 & 42 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 & -21 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Řešením soustavy je tedy vektor $x = (2, 1, 1)$ pro pravou stranu b_1, vektor $x = (1, 0, 3)$ pro b_2 a vektor $x = (4, -1, -1)$ pro b_3.

3. Operace s maticemi

Cv. 3.1 Spočtěte následující výrazy:

(a) $2A$,
(b) $A+B$,
(c) C^T,
(d) Cv,
(e) BC,

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

(a) Pokud matice A je řádu $m \times n$ výsledná matice bude také řádu $m \times n$. Výslednou matici získáme tak, že každou složku matice A násobíme příslušnou konstantou (tj. hodnotou 2). Dostáváme:

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Abychom mohli sečíst matice A, B musí mít shodné rozměry (všimněme si, že obě jsou shodného řádu 2×2). Výsledná matice bude mít stejné rozměry jako matice A (resp. B), tedy 2×2. Výsledek získáme sčítáním po složkách, tj. každá pozice výsledné matice je součtem hodnot z matice A a B na dané pozici. Dostáváme:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+(-1) \\ 2+0 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Je-li původní matice rozměrů $m \times n$, transponovaná matice bude mít rozměry $n\times m$. Její prvek na pozici (i,j) je pak roven prvku, který je v původní matici na pozici (j,i). Proto získáváme:

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Je-li matice C řádu $m \times n$, musí v být n-složkový vektor a výsledkem bude m složkový vektor. V tomto případě je matice C řádu 2×3 a vektor v má 3 složky (řády tedy souhlasí) a výsledkem bude 2-složkový vektor. Výsledný vektor spočteme následovně:

$$Cv = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + 0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Na násobení jsme mohli také pohlížet jako na násobení matice C řádu 2×3 s maticí odpovídající vektoru v řádu 3×1.

(e) Je-li matice B řádu $m \times n$ musí být matice C řádu $n \times \ell$ a výsledná matice bude řádu $m \times \ell$. V tomto případě je matice B řádu 2×2 a matice C řádu 2×3 (tedy řády souhlasí) a výsledná matice bude řádu 2×3. Výslednou matici spočteme následovně:

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3 + (-1)\cdot 2 & (-1)\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) & (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \\ 0\cdot 3 + 3\cdot 2 & 0\cdot 0 + 3\cdot(-2) & 0\cdot 1 + 3\cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cv. 3.2 Mějme A, b definované jako

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ověřte pomocí maticového násobení, zda jsou vektory $x = (0, 1, 2)^T$, $y = (0, -1, 2)^T$ řešením soustavy $Ax = b$.

Řešení:
Násobením Ax dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Násobením Ay dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vektor x tedy řešením soustavy není, zatímco vektor y ano.

Cv. 3.3 Najděte příklad nekomutativnosti násobení čtvercových matic 2×2.

Řešení:
Toto je kreativní příklad. V zásadě skoro každé dvě netriviální matice splní zadání. Například:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3.4 Dokažte pro $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z definice:

(a) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,

(b) $A(B + C) = AB + AC$,

(c) $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Řešení:
Rovnost $X = Y$ dvojice matic $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí, pokud si jsou rovny všechny jejich prvky. Ve všech podúlohách proto otestujeme pro libovolnou dvojici indexů i, j rovnost $X_{ij} = Y_{ij}$.

(a) Z definice násobení skalárem a maticového násobení vyjádříme

- $(\alpha(AB))_{ij} = \alpha(AB)_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$,
- $((\alpha A)B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha A)_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha A_{ik}B_{kj}$,
- $(A(\alpha B))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(\alpha B)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\alpha B_{kj}$.

Z vlastností komutativity a distributivity reálných čísel vyplývá vzájemná rovnost všech tří výrazů.

(b) Z definice násobení vyjádříme

$$(A(B+C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B_{kj} + C_{kj})$$

a

$$(AB+AC)_{ij} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}C_{kj}.$$

Roznásobením členů sumy v prvním výrazu a jejich přeuspořádáním můžeme rozdělit výraz na dvě sumy odpovídající druhému výrazu.

(c) Z definice transpozice a sčítání matic vyjádříme

$$((A+B)^T)_{ij} = (A+B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$$

a

$$(A^T + B^T)_{ij} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} = a_{ji} + b_{ji}.$$

Cv. 3.5 Dokažte:

(a) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$,

(b) $A^T A$ je symetrická matice pro každé $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Řešení:

(a) Z přednášky víme, že $(AB)^T = B^T A^T$. Tuto vlastnost využijeme dvakrát a vyjádříme

$$((AB)C)^T = C^T(AB)^T = C^T B^T A^T.$$

(b) Matice M je symetrická, pokud $M^T = M$. Ověříme tedy tuto vlastnost pro matici $M = A^T A$. Odvodíme $M^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = M$, což dokazuje požadovanou symetrii.

Cv. 3.6 Buď A matice řádu 10×5, B matice řádu 5×20 a C matice řádu 20×1. Jak co nejefektivněji (co do počtu aritmetických operací) spočítat součin ABC?

Řešení:

Na vynásobení dvou obecných matic $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$ je třeba $m \cdot p$ skalárních součinů ve tvaru $(XY)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} X_{ik}Y_{kj}$. V rámci každého je třeba provést n násobení (za každý člen sumy) a $n-1$ součtů. Celkově tedy provedeme $mp(2n-1)$ aritmetických operací. Při násobení v pořadí $(AB)C$ nejprve vynásobíme AB, což stojí

$$10 \cdot 20 \cdot (2 \cdot 5 - 1) = 1800 \text{ operací.}$$

Matice AB má rozměr 10×20. Násobení $(AB)C$ proto stojí dalších

$$10 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 20 - 1) = 390 \text{ operací.}$$

Celkem tedy násobení v pořadí $(AB)C$ stojí 2190 aritmetických operací.

Oproti tomu, násobení BC stojí

$$5 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 20 - 1) = 195 \text{ operací}$$

a $A(BC)$ stojí dalších

$$10 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 5 - 1) = 90 \text{ operací.}$$

Celkem tedy násobení v pořadí $A(BC)$ stojí 285 aritmetických operací, což je podstatně méně, než v prvním případě.

Poučení: I když je násobení matic asociativní, a tudíž na uzávorkování nezáleží matematicky, tak na něm záleží výpočetně.

Cv. 3.7 Pro $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ určete následující.

(a) $A(\alpha e_i)$

(b) $A(e_i + e_j)$

(c) $(\alpha e_i)^T A$

(d) $(e_j + e_j)^T A$

(e) $e_i^T A e_j$

(f) $x^T A y$

Řešení:

(a) Z vlastnosti součinu můžeme upravit $A(\alpha e_i) = \alpha(Ae_i)$. Výraz $A(\alpha e_i)$ tedy odpovídá α-násobku i-tého sloupce A_{*i}. Pro $\alpha = 1$ tak dostaneme známé trvzení $Ae_i = A_{*i}$.

(b) Opět nejprve upravíme $A(e_i + e_j) = Ae_i + Ae_j$. Výraz $A(e_i + e_j)$ tedy odpovídá součtu i-tého a j-tého sloupce $A_{*i} + A_{*j}$.

(c) Z vlastnosti součinu můžeme upravit $(\alpha e_i)^T A = \alpha(e_i^T A)$. Výraz $(\alpha e_i)^T A$ tedy odpovídá α-násobku i-tého řádku A_{i*}. Pro $\alpha = 1$ tak dostaneme známé trvzení $e_i^T A = A_{i*}$.

(d) Opět nejprve upravíme $(e_j + e_j)^T A = e_j^T A + e_j^T A$. Výraz $(e_j + e_j)^T A$ tedy odpovídá součtu j-tého a j-tého řádku $A_{j*} + A_{j*}$.

(e) Aplikací předchozích vztahu postupným násobením dostáváme $(e_i^T A)e_j = A_{i*}e_j = A_{ij}$. Výraz $e_i A e_j$ tedy odpovídá výběru prvku a_{ij}.

(f) Využijeme všech předchozích vztahů a faktu, že vektory x, y můžeme vyjádřit jako kombinace $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_me_m$ a $y = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n$. Poté

$$x^T Ay = (x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_me_m)^T A(y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n).$$

Z distributivity, asociativity a vztahu $e_i^T Ae_j$ postupně dostáváme

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_ie_j)^T A(y_je_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_iy_je_i^T Ae_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jA_{ij}.$$

Cv. 3.8 Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Řešení:

(a) Vynásobení i-tého řádku skalárem $\alpha \neq 0$ můžeme zapsat pomocí matice

$$E_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici (i, i) zaměníme 1 za α. Násobením touto maticí **zleva** násobíme i-tý řádek konstantou α.

To můžeme ověřit z definice násobení. Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je libovolná matice a $E_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je matice popsaná výše. Potom pro libovolný řádek $j \in \{1, \ldots, m\}$ a sloupec $k \in \{1, \ldots, n\}$ matice $E_i(\alpha)A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí:

$$\begin{aligned}
(E_i(\alpha)A)_{jk} &= \sum_{\ell}(E_i(\alpha))_{j\ell}A_{\ell k} \\
&= (E_i(\alpha))_{jj}A_{jk} && ((E_i(\alpha))_{j\ell} \neq 0 \text{ pouze pro } \ell = j) \\
&= \begin{cases} A_{jk} & \text{pro } j \neq i \\ \alpha A_{jk} & \text{pro } j = i \end{cases} && (\text{dosadíme za } (E_i(\alpha))_{jj})
\end{aligned}$$

Vidíme, že $E_i(\alpha)A$ má všechny řádky kromě i-tého shodné s maticí A a i-tý řádek je vynásoben skalárem α.

(b) Přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, kde $i \neq j$. Můžeme zapsat pomocí matice

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & j & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici (i, j) zaměníme nulu za α. Násobením touto maticí **zleva** přičítáme α-násobek j-tého řádku k i-tému.

Ověření provedeme z definice násobení matic. Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je libovolná matice a $E_{ij}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je matice popsaná výše. Potom pro libovolný řádek $k \in \{1, \dots, m\}$ a sloupec $h \in \{1, \dots, n\}$ matice $E_{ij}(\alpha)A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí:

$$\begin{aligned}
(E_{ij}(\alpha)A)_{kh} &= \sum_{\ell} (E_{ij}(\alpha))_{k\ell} A_{\ell h} \\
&= \begin{cases} (E_{ij}(\alpha))_{kk} A_{kh} & \text{pro } k \neq i \\ (E_{ij}(\alpha))_{kk} A_{kh} + (E_{ij}(\alpha))_{kj} A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \\
&\qquad\qquad (\text{pro ostatní hodnoty } m \text{ je } (E_{ij}(\alpha))_{k\ell} = 0) \\
&= \begin{cases} A_{kh} & \text{pro } k \neq i \\ A_{kh} + \alpha A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \\
&\qquad\qquad (\text{dosadíme příslušné hodnoty z matice } E_{ij}(\alpha))
\end{aligned}$$

Vidíme, že všechny řádky kromě i-tého zůstaly zachovány a k i-tému řádku jsme přičetli α násobek j-tého řádku.

(c) Prohození i-tého a j-tého řádku můžeme zapsat pomocí matice

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a prohodíme její i-tý a j-tý řádek. Násobením touto maticí **zleva** prohazujeme i-tý a j-tý řádek.

Ověření zase provedeme z definice násobení. Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je libovolná matice $E_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je matice popsaná výše. Potom pro libovolný řádek

$k \in \{1, \ldots, m\}$ a sloupec $h \in \{1, \ldots, n\}$ matice $E_{ij}A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí:

$$
\begin{aligned}
(E_{ij}A)_{kh} &= \sum_{\ell} (E_{ij})_{k\ell} A_{\ell h} \\
&= \begin{cases} (E_{ij})_{kk} A_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ (E_{ij})_{ki} A_{ih} & \text{pro } k = j \\ (E_{ij})_{kj} A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad \text{(pro ostatní hodnoty } \ell \text{ je } (E_{ij})_{k\ell} = 0) \\
&= \begin{cases} A_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ A_{ih} & \text{pro } k = j \\ A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad \text{(dosadíme příslušné hodnoty z matice } (E_{ij}))
\end{aligned}
$$

Vidíme, že $(E_{ij})A$ má všechny řádky kromě i-tého a j-tého shodné s maticí A a i-tý a j-tý řádek jsou prohozeny.

Cv. 3.9 Co dělají matice elementárních řádkových úprav při násobení matice A zprava?

Řešení:

K odpovědi bychom mohli dojít několika způsoby. Jedna možnost by byla vynásobit postupně matici A maticemi elementárních řádkových úprav zprava a zanalyzovat výsledek. My však využijeme toho, že víme, co se děje při násobení maticemi elementárních řádkových úprav zleva a vlastností transpozice matic. Pokud je E jedna z matic úprav, dostáváme

$$(AE)^T = E^T A^T.$$

Na tento vztah se dá nahlížet tak, že sloupce AE odpovídají řádkům $E^T A^T$. Z definice matic elementárních řádkových úprav je snadné nahlédnout, jak vypadají jejich transpozice. Konkrétně

- $(E_i(\alpha))^T = E_i(\alpha)$,
- $(E_{ij}(\alpha))^T = E_{ji}(\alpha)$,
- $(E_{ij})^T = E_{ij}$.

Zatímco pro první a třetí úpravu je transpozice rovna původní matici, pro přičtení α-násobku j-tého řádku i i-tému se transpozicí změní na příčtení α-násobku i-tého řádku k j-tému.

Vidíme tedy, že $E^T A^T$ odpovídá provádění elementárních řádkových úprav na řádky matice A^T, které odpovídají sloupcům matice A. Kombinací všech těchto pozorování dostáváme následující závěr.

(a) Sloupce $AE_i(\alpha)$ odpovídají řádkům $E_i(\alpha)A^T$. Aplikací této úpravy zprava vynásobíme i-tý sloupec matice A skalárem α.

(b) Sloupce $AE_{ij}(\alpha)$ odpovídají řádkům $E_{ji}(\alpha)A^T$. Aplikací této úpravy přičteme α-násobek i-tého sloupce k j-tému sloupci matice A.

(c) Sloupce AE_{ij} odpovídají řádkům $E_{ij}A^T$. Aplikací této úpravy zprava prohodíme i-tý a j-tý sloupec matice A.

Cv. 3.10 Spočtěte hodnost následujících matic.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$,

(b) $A = ab^T$, kde $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Řešení:

(a) K výpočtu hodnosti je možné využít Gaussovu eliminaci. Vidíme, že druhý řádek je fakticky 3-násobek prvního. Proto po jednom kroku eliminace, kdy přičteme (-3)-násobek prvního řádku k druhému dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta je již v REF tvaru a její hodnost je 1.

(b) Pro určení hodnosti matice je dobré si uvědomit, jak matice vypadá. Platí, že $(ab^T)_{ij} = a_i b_j$, explicitně

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & \\ — & a_1b^T & — \\ — & a_2b^T & — \\ — & a_3b^T & — \\ & \vdots & \\ — & a_nb^T & — \\ & & \end{pmatrix}.$$

Řádky matice ab^T jsou jen násobky vektoru b^T. Mohou tedy nastat pouze dvě situace. Pokud $a = 0$ nebo $b = 0$, triviálně $\operatorname{rank}(ab^T) = 0$. V opačném případě existuje aspoň jedno $a_i \neq 0$ a všechny řádky matice jsou násobky i-tého řádku. Podobně jako v předchozí úloze je tedy $\operatorname{rank}(ab^T) = 1$.

4. Regulární a inverzní matice

Cv. 4.1 Otestujte regularitu matice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Regularitu matice můžeme otestovat pomocí hodnosti matice. Převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Matice má plnou hodnost, tedy je regulární.

Cv. 4.2 Rozhodněte, kdy je trojúhelníková matice regulární.

Řešení:

Horní trojúhelníková matice je již (skoro) v odstupňovaném tvaru. Pokud jsou diagonální prvky nenulové, pak to jsou pivoty a matice je regulární. Pokud alespoň jeden diagonální prvek je nulový, pak v příslušném sloupci není pivot, a tím pádem je matice singulární.

Pro dolní trojúhelníkovou matici je situace podobná. Matici transponujeme a převedeme tím na předchozí případ.

Cv. 4.3 Dokažte, že následující matice jsou singulární, a to tak, že najdete nenulové řešení soustavy $Ax = 0$:

(a) matice A má nulový i-tý sloupec tj. $A_{*i} = 0$;

(b) matice A má i-tý a j-tý sloupec shodný, tj. $A_{*i} = A_{*j}$ pro $i \neq j$.

Řešení:

(a) $x = e_i$;

(b) $x = e_i - e_j$.

Cv. 4.4 Najděte inverzní matici k maticím

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

Řešení:
Ve všech třech případech využijeme algoritmu, kdy pomocí Gaussovy–Jordanovy (G-J) eliminace převedeme matici $(A \mid I_n)$ na tvar $(I_n \mid A^{-1})$.

(a) Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

(b) Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

(c) Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1 & & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & d_n & 0 & & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & \frac{1}{d_1} & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & \frac{1}{d_n} \end{array}\right)$$

Jediné, co G-J eliminace provádí za operace je přeškálování řádků, protože první podmatice je již v diagonálním tvaru.

Inverzní matice existuje ale jen tehdy, když všechny hodnoty $d_1, \ldots, d_n$ jsou nenulové. V opačném případě je matice singulární, a tudíž inverzi nemá.

Cv. 4.5 Invertujte matice elementárních řádkových úprav.

Řešení:
Ukážeme dva postupy.

1) První způsob je pomocí G-J eliminace převodem $(A \mid I_n)$ na $(I_n \mid A^{-1})$. Matici

$E_i(\alpha)$ invertujeme takto:

$$(E_i(\alpha) \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1/\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) = (I_n \mid E_i(\alpha^{-1})).$$

Matici $E_{ij}(\alpha)$ invertujeme takto:

$$(E_{ij}(\alpha) \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & & -\alpha & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & & & & & 1 \end{array}\right) = (I_n \mid E_{ij}(-\alpha)).$$

Matici E_{ij} invertujeme takto:

$$(E_{ij} \mid I_n) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I_n \mid E_{ij}).$$

Tudíž $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(\alpha^{-1})$, $E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$ a $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

2) Druhý způsob je využitím významu matic elementárních úprav. Matice $E_i(\alpha)$ násobí i-tý řádek číslem $\alpha \neq 0$. Inverzní operace je vydělení i-tého řádku číslem α, což je reprezentováno maticí $E_i(\alpha^{-1})$. Zkouška $E_i(\alpha)E_i(\alpha^{-1}) = I$ pak skutečně ověří, že se jedná o inverzní matici.

Matice $E_{ij}(\alpha)$ přičte α-násobek j-tého řádku k i-tému. Inverzní operace je odečtení α-násobku j-tého řádku od i-tého, což je representováno maticí $E_{ij}(-\alpha)$. Zkouška opět ověří, že se jedná o inverzní matici.

Matice E_{ij} prohazuje i-tý a j-tý řádek. Inverzní operace je tatéž, výměna i-tého a j-tého řádku. Tudíž matice E_{ij} je inverzní sama k sobě.

Cv. 4.6 Upravte následující výrazy.

(a) $(ABC)^{-1}$

(b) $(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}$

Řešení:

(a) Stačí iterativně aplikovat pravidlo $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$. Tedy:

$$(ABC)^{-1} = (A(BC))^{-1} = (BC)^{-1}A^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

(b) S využitím základních vlastností maticového součinu, transpozice a inverze odvodíme

$$\begin{aligned}
(I - B^T A^{-1})A &+ (A^T B)^T A^{-1} \\
&= IA - B^T A^{-1}A + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[distributivita]} \\
&= IA - B^T I + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[definice inverze]} \\
&= A - B^T + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[násobení maticí } I\text{]} \\
&= A - B^T + B^T A A^{-1} \quad \text{[transpozice součinu matic]} \\
&= A - B^T + B^T \quad \text{[definice inverze]} \\
&= A.
\end{aligned}$$

Cv. 4.7 Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde A regulární, platí

$$(ABA^{-1})^k = AB^k A^{-1}.$$

Řešení:
Postupujeme matematickou indukcí. Pro $k = 1$ tvrzení platí, protože

$$(ABA^{-1})^1 = AB^1 A^{-1}.$$

Indukční krok. Nechť tvrzení platí pro $k - 1$, tedy $(ABA^{-1})^{k-1} = AB^{k-1}A^{-1}$. Upravíme za použití indukčního předpokladu

$$\begin{aligned}
(ABA^{-1})^k &= (ABA^{-1})^{k-1}(ABA^{-1}) = (AB^{k-1}A^{-1})(ABA^{-1}) \\
&= AB^{k-1}(A^{-1}A)BA^{-1} = AB^{k-1}BA^{-1} \\
&= AB^k A^{-1}.
\end{aligned}$$

Cv. 4.8 Invertujte matici řádu n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Řešení:

Podle postupu sestavíme rozšířenou matici:

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Od řádků 2 až n odečteme první řádek a dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

V levé části je vpravo dole je matice stejného typu jako A, pouze o řád menší. Postupujeme tedy indukcí dále a po dalších $n-2$ krocích dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & \dots & 1 & 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní od prvního řádku odečteme druhý, pak od druhého třetí, atd. až od předposledního ten poslední. Dostaneme matici, kde hledaná inverze A^{-1} je napravo

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Cv. 4.9 Mějme blokovou matici $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix}$ s bloky $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Rozhodněte, kdy je regulární.

(b) Určete inverzi, pokud $B = 0_n$.

(c) Určete inverzi obecně.

Řešení:

(a) Regularitu můžeme otestovat Gaussovou eliminací převodem do odstupňovaného tvaru. Uvědomme si, že při eliminaci řádků odpovídajících matici A nijak neupravujeme řádky odpovídající C a naopak. Regularita matice je proto podmíněna regularitou bloku C, v opačném případě bychom dostali nulový řádek. Pokud je blok C regulární, jsme schopni matici převést do tvaru

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Tedy pokud by nebyl blok A regulární, mohli bychom z tohoto tvaru získat Gaussovou eliminací nulový řádek. Regularita bloků A, C je tedy nutnou podmínkou regularity matice.

Zároveň regularita A, C zajišťuje, že můžeme převést matici do tvaru

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix},$$

což je redukovaný odstupňovaný tvar původní matice s plnou hodností. Regularita bloků A, C je tedy jak nutnou, tak i postačující podmínkou regularity.

(b) Pro výpočet inverze můžeme blokově zapsat rozšířenou soustavu jako

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & C & 0_n & I_n \end{array}\right).$$

Podobně jako v předchozím podúloze se při G-J eliminaci budou upravovat řádky odpovídající blokům A a C nezávisle na sobě. Při převodu $\left(A \quad 0_n \mid I_n \quad 0_n\right)$ se nulové bloky 0_n po celou dobu výpočtu nebudou měnit a nebude na nich záviset ani podoba eliminace. Na konci eliminace proto dostaneme $\left(I_n \quad 0_n \mid A^{-1} \quad 0_n\right)$. Obdobný průběh bude mít i výpočet na podmatici $\left(0_n \quad C \mid 0_n \quad I_n\right)$. Inverzní matice má proto tvar

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0_n \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

(c) Pro výpočet inverze můžeme blokově zapsat rozšířenou soustavu jako

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0_n \\ 0_n & C & 0_n & I_n \end{array}\right).$$

Opět využijeme nezávislosti eliminace pro řádky odpovídající blokům A a C a převedeme matici nejprve do tvaru

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array}\right).$$

Klíčové je, že po zbytek eliminace se spodní dva bloky již měnit nebudou. Víme tedy, že inverzní matice má tvar

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix},$$

kde matice X, Y zatím neznáme. Určit je můžeme ze vztahu matice a její inverze,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Z tohoto vztahu můžeme odvodit dvojici soustav,

$$AX = I_n \quad \text{a} \quad AY + BC^{-1} = 0_n.$$

Z první soustavy dostáváme $X = A^{-1}$, z druhé $Y = -A^{-1}BC^{-1}$. Inverzní matice má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Alternativní způsob získání matic X, Y je, že upravujeme přímo bloky v matici

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array}\right).$$

První blokový řádek vynásobíme maticí A^{-1} (z bodu (a) víme, že existuje):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I_n & A^{-1}B & A^{-1} & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array}\right)$$

a nakonec od prvního blokového řádku odečteme $A^{-1}B$-násobek druhého:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I_n & 0_n & A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array}\right)$$

Cv. 4.10 Uvažujme matici v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b & C \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $C \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Aplikujte na matici jednu iteraci Gaussovy eliminace a odvoďte rekurentní vzoreček na test regularity.

Řešení:

Od druhého řádkového bloku odečteme $\frac{1}{\alpha}b$-násobek prvního řádku a dostaneme

$$\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b - \alpha\frac{1}{\alpha}b & C - \frac{1}{\alpha}ba^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ o & C - \frac{1}{\alpha}ba^T \end{pmatrix}.$$

Tím jsme provedli jednu iteraci Gaussovy eliminace. Protože pivot vlevo nahoře je nenulový, můžeme usoudit, že matice A je regulární právě tehdy, když je regulární matice $C - \frac{1}{\alpha}ba^T$. Tím jsme zredukovali test regularity matice řádu n na regularity matice matice řádu $n-1$.

5. Grupy a tělesa

Cv. 5.1 Zjistěte, zda je (Abelovou) grupou:

(a) $(\mathbb{Q}, +)$,

(b) $(\mathbb{Q}, -)$,

(c) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,

(d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(e) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(f) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = a + b + 3$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(g) $(\mathcal{F}, +)$, tj. množina $\mathcal{F}$ všech reálných funkcí jedné proměnné s operací sčítání funkcí,

(h) množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku s operací skládání zobrazení,

(i) množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ s operací skládání zobrazení.

<u>Řešení:</u>

(a) $(\mathbb{Q}, +)$ je Abelovou grupou:

- sčítání je komutativní i asociativní operace,
- neutrální prvek je 0
- k racionálnímu číslu q je inverzní prvek $-q$.

(b) $(\mathbb{Q}, -)$ není grupou, protože rozdíl racionálních čísel není asociativní operace. Například $(8 - 6) - 1 = 1 \neq 3 = 8 - (6 - 1)$.

(c) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ není grupou. Součin je sice komutativní i asociativní operace a existuje neutrální prvek 1, ale k číslu 0 neexistuje inverzní prvek.

(d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$ s operací $a \circ b = |ab|$ není grupou, protože není zaručena existence neutrálního prvku. Pro každé $a < 0$ a číslo e je $a \circ e = |ae| > 0 > a$. Tudíž žádné e nemůže splňovat definici neutrálního prvku pro záporná a.

(e) $(\mathbb{Q}, \circ)$ s operací $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ není grupou, protože aritmetický průměr čísel není asociativní. Například pro $a = 1$, $b = 5$, $c = 7$ máme $a \circ (b \circ c) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5+7}{2}\right) = 3.5 \neq 5 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+5}{2} + 7\right) = (a \circ b) \circ c$.

(f) $(\mathbb{Q}, \circ)$ s operací $a \circ b = a + b + 3$ je Abelovou grupou. Asociativita a komutativita platí z asociativity a komutativity sčítání nad $\mathbb{Q}$. Neutrální prvek je $e = -3$, protože pro každé $a \in \mathbb{Q}$ platí

$$a \circ e = a + (-3) + 3 = a = (-3) + a + 3 = e \circ a.$$

Konečně, inverzní prvek k prvku $a \in \mathbb{Q}$ je $a^{-1} = -a - 6$, protože

$$a \circ a^{-1} = a + (-a - 6) + 3 = -3 = e = -3 = (-a - 6) + a + 3 = a^{-1} \circ a.$$

(g) $(\mathcal{F}, +)$ je grupou. Asociativita plyne z definice součtu funkcí a asociativity sčítání nad $\mathbb{R}$. Pro každé $f, g, h \in \mathcal{F}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$. Neutrální prvek je identicky nulová funkce $e(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Inverzní prvek k funkci $f \in \mathcal{F}$ je funkce $-f$.

(h) Množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku je Abelovou grupou. Asociativita plyne z asociativity skládání zobrazení. Komutativita platí také, protože uvažujeme rotace v rovině. Neutrálním prvkem je například rotace o 360 stupňů. Inverzním prvkem k rotaci o úhel α je rotace o úhel α v opačném směru.

(i) Množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ je Abelovou grupou. Asociativita plyne z asociativity skládání zobrazení a komutativita z komutativity sčítání vektorů. Neutrálním prvkem je identické zobrazení $e((x_1, x_2)^T) = (x_1, x_2)^T$ (tj. posunutí vektorem $(0, 0)^T$) a inverzím prvkem k posunutí $t((x_1, x_2)^T) = (x_1, x_2)^T + (a, b)^T$ je posunutí $t^{-1}((x_1, x_2)^T) = (x_1, x_2)^T - (a, b)^T$.

Cv. 5.2 Vyplňte tabulku pro binární operaci $\circ$ na G tak aby $(G, \circ)$ byla grupou s neutrálním prvkem 0. Výsledek zdůvodněte.

(a)

$\circ$	0	1
0		
1		

(b)

$\circ$	0	1	2
0			
1			
2			

(c)

$\circ$	0
0	

(d)

$\circ$	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

Řešení:

Všechny tabulky až na poslední jsou určeny jednoznačně. Fakt, že 0 je neutrálním prvkem pro $\circ$ určuje první řádek i sloupec tabulky. Existence levé i pravé inverze omezuje pozice 0 na diagonále nebo symetricky podle diagonály. Asociativita vynutí zbylé pozice. Dostáváme:

(a)

$\circ$	0	1
0	0	1
1	1	0

... aditivní grupa modulo 2, tj. $(\mathbb{Z}_2, +)$

(b)

$\circ$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

... aditivní grupa modulo 3, tj. $(\mathbb{Z}_3, +)$

(c)

$\circ$	0
0	0

... triviální grupa,

(d)

$\circ$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

, anebo

$\circ$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	1	0
3	3	2	0	1

.

První je Kleinova grupa symetrií obdélníka, a to druhé je $(\mathbb{Z}_4, +)$ s přejmenovanými čísly (prohozena 1 a 2).

Cv. 5.3 Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou grupou množina

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ z \in \mathbb{Z} \right\} \text{ s maticovým součinem.}$$

<u>Řešení</u>:

Ano. Nejdříve ukážeme, že maticový součin je uzavřený pro danou množinu. Pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

což je matice náležející do zadané množiny (neboť celá čísla jsou uzavřená na součet).

Asociativita maticového součinu na dané množině plyne z asociativity maticového součinu pro obecné čtvercové matice stejných rozměrů.

Neutrálním prvkem je jednotková matice řádu dva, jež patří do zadané množiny (volbou $z := 0 \in \mathbb{Z}$).

Inverzním prvkem pro matici $\left(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ je celočíselná matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, což plyne z rovnosti (1).

Zadaná množina matic spolu s maticovým součinem tvoří grupu. Zbývá ověřit, zda je maticový součin pro tyto matice komutativní. Komutativita maticového součinu plyne z rovnosti (1) a komutativity sčítání nad $\mathbb{Z}$. I když obecně součin matic není komutativní, pro naši třídu matic komutativita splněna jest.

Ověřili jsme tedy, že se jedná o Abelovskou grupu.

Cv. 5.4 Mějme grupu $(G, \circ)$ s neutrálním prvkem e a inverze k prvku a nechť je a^{-1}. Proveďte:

(a) najděte e^{-1},

(b) upravte $(a \circ b)^{-1}$.

<u>Řešení</u>:

(a) $e^{-1} = e$, neboť $e \circ e = e$.

(b) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ neboť

$$(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) = a \circ (b \circ b^{-1}) \circ a^{-1} = a \circ e \circ a^{-1} = a \circ a^{-1} = e$$

a analogicky v opačném pořadí.

Cv. 5.5 Najděte různé příklady podgrup grupy matic $(\mathbb{R}^{n\times n}, +)$.

Řešení:
Příkladů je nespočet. Podgrupou je taková (neprázdná) podmnožina matic $\mathbb{R}^{n\times n}$, která je uzavřená na násobky a součty. Přikladem je tak například podgrupa symetrických matic. Dalšími příklady jsou trojúhelníkové matice, horní trojúhelníkové matice, diagonální matice, matice s racionálními čísly, matice s celými čísly, atp.

Cv. 5.6 Vyjádřete jako prvky daného tělesa výrazy:

(a) $((2^{-1}+1)4)^{-1}$ a $4/3$ v tělese $\mathbb{Z}_5$,

(b) $6+7$, -7, $6\cdot 7$, 7^{-1} a $6/7$ v tělese $\mathbb{Z}_{11}$.

Řešení:

(a) Těleso $\mathbb{Z}_5$ je definováno jako množina všech zbytků v $\mathbb{Z}$ po dělení 5 spolu s operacemi součtu a součinu modulo 5. Pro názornost uvádíme tabulky pro obě operace.

$\mathbb{Z}_5, +$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

,

$\mathbb{Z}_5, \cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Podle definice tělesa má množina $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\} = \{1,2,3,4\}$ se součinem modulo 5 tvořit Abelovu grupu; zde je to takzvaná multiplikativní grupa modulo 5. V tabulce můžeme některé vlastnosti grupy snadno nahlédnout, například komutativitu nebo existenci neutrálního a inverzního prvku.

Nyní můžeme vyhodnotit zadané výrazy v $\mathbb{Z}_5$, kde při výpočtu nalezneme multiplikativní inverzi k libovolnému $a \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$ v tabulce tak, že v řádku s a najdeme hodnotu 1 a index b odpovídajícího sloupce musí být hledaná multiplikativní inverze a^{-1}, protože $a \cdot b = 1$ v $\mathbb{Z}_5$. Dostáváme:

$$((2^{-1}+1)4)^{-1} = ((3+1)4)^{-1} = (4\cdot 4)^{-1} = (1)^{-1} = 1 \text{ v } \mathbb{Z}_5$$

a

$$4/3 = 4\cdot 3^{-1} = 4\cdot 2 = 3 \text{ v } \mathbb{Z}_5.$$

(b) Postupujeme podobně jako pro $\mathbb{Z}_5$, ale nebudeme konstruovat celou tabulku pro součin v $\mathbb{Z}_{11}$. Dostáváme:

$$\begin{aligned} 6+7 &= 6+7 \pmod{*}11 = 13 \pmod{*}11 = 2 \text{ v } \mathbb{Z}_{11},\\ -7 &= 11-7 \pmod{*}11 = 4 \text{ v } \mathbb{Z}_{11}.\\ 6\cdot 7 &= 6\cdot 7 \pmod{*}11 = 42 \pmod{*}11 = 9 \text{ v } \mathbb{Z}_{11}. \end{aligned}$$

Při hledání multiplikativní inverze k prvku 7 můžeme postupovat jako při výpočtu řádku odpovídajícího 7 v tabulce pro součin v $\mathbb{Z}_{11}$. Výpočet zastavíme v momentě, kdy uvidíme na pravé straně číslo 1:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 1 &= 7, \\ 7 \cdot 2 &= 3, \\ 7 \cdot 3 &= 10, \\ 7 \cdot 4 &= 6, \\ 7 \cdot 5 &= 2, \\ 7 \cdot 6 &= 9, \\ 7 \cdot 7 &= 5, \\ 7 \cdot 8 &= 1. \end{aligned}$$

Vidíme, že

$$7^{-1} = 8 \text{ v } \mathbb{Z}_{11}.$$

Tuto hodnotu využijeme i při posledním výpočtu:

$$6/7 = 6 \cdot 7^{-1} = 6 \cdot 8 = 48 \pmod{*} 11 = 4 \text{ v } \mathbb{Z}_{11}.$$

Cv. 5.7 Nad $\mathbb{Z}_5$ najděte množinu všech řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1, \\ 4x + y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

a spočítejte její mohutnost.

Řešení:
Postupujeme podobně jako pro soustavy rovnic nad $\mathbb{R}$. Využijeme toho, že eliminovat prvky pod pivotem můžeme přičtením vhodného násobku řádku s pivotem. Přičtením 2-násobku prvního řádku k druhému dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Za volné proměnné zvolíme parametry $y, z \in \mathbb{Z}_5$ a vyjádříme

$$x = 3^{-1}(1 - 2y - z) = 2(1 + 3y + 4z) = 2 + y + 3z.$$

Množina všech řešení dané soustavy je tedy

$$\{(2,0,0)^T + y(1,1,0)^T + z(3,0,1)^T \mid y, z \in \mathbb{Z}_5\}.$$

Máme $25 = 5 \cdot 5$ různých voleb parametrů y a z a mohutnost množiny řešení je tedy 25.

Cv. 5.8 V $\mathbb{Z}_7$ spočítejte mocninu matice A^{100} pro matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Řešení:

Nad konečným tělesem musí být posloupnost matic A^i pro $i = 1, \dots, \infty$ cyklická. Spočtěme několik prvních členů této posloupnosti:

$$\begin{aligned}
A = A^1 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \\
A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \\
A^3 &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \\
A^4 &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\
A^5 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
A^6 &= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
A^7 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A.
\end{aligned}$$

Vidíme, že perioda této posloupnost je 6. Hledanou mocninu matice tedy spočítáme jako

$$A^{100} = A^{100 \pmod{*} 6} = A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Trochu práce si můžeme ušetřit tím, že si uvědomíme, že druhá mocnina má tvar $A^2 = 4I_2$. Tudíž

$$A^{100} = (A^2)^{50} = (4I_2)^{50} = 4^{50} I_n.$$

Tím jsme maticový problém zredukovali na skalární problém. Z Malé Fermatovy věty víme, že $4^6 = 1$ v $\mathbb{Z}_7$, čili

$$4^{50} I_n = 4^{50 \pmod{*} 6} I_n = 4^2 I_n = 2I_n.$$

Cv. 5.9 Spočítejte 20^{3332} v tělese $\mathbb{Z}_{31}$.

Řešení:

Z Malé Fermatovy věty víme, že v tělese $\mathbb{Z}_{31}$ je $20^{30} = 1$. Proto

$$20^{3332} = 20^{3332 \pmod{*} 30} = 20^2 = 28.$$

6. Permutace

Cv. 6.1 Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte jejich cykly, znaménka, inverze a složte permutace p, q mezi sebou v obou pořadích.

Řešení:

Permutace p zobrazuje $1 \to 2$, dále $2 \to 3$, $3 \to 4$ a $4 \to 1$. Tudíž jeden cyklus je $(1, 2, 3, 4)$, analogicky druhý cyklus je $(5, 6)$. Tudíž zápis permutace pomoci cyklů je $p = (1, 2, 3, 4)(5, 6)$.

Podobně pro permutaci q máme $1 \to 1$ (první cyklus), $2 \to 3$, $3 \to 2$ (druhý cyklus) a $4 \to 5$, $5 \to 6$, $6 \to 4$ (třetí cyklus). Permutaci q lze zapsat pomocí cyklů jako $q = (1)(2, 3)(4, 5, 6)$.

Permutace p je zadána na $n = 6$ prvcích a skládá se ze $c = 2$ cyklů, proto má znaménko $\operatorname{sgn}(p) = (-1)^{n-\text{počet cyklů}} = (-1)^{6-2} = 1$. Podobně spočítáme $\operatorname{sgn}(q) = (-1)^{6-3} = -1$.

Inverzní permutaci k permutaci p můžeme najít několika způsoby. Pokud vyjdeme z tabulkového zadání p, tak stačí prohodit oba řádky, čímž se ze vzorů stanou obrazy a naopak, a pak jen setřídit sloupce od nejmenšího po největší. Dostaneme p^{-1} vyjádřené tabulkou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pokud využijeme zápisu p pomocí cyklů, stačí pouze prohodit pořadí čísel v každém cyklu, tj. $p^{-1} = (4, 3, 2, 1)(6, 5)$. Zde si můžeme uvědomit, že cykly délek 1 a 2 nemusíme invertovat, protože jsou sami sobě inverzní.

Permutace skládáme jako každé jiné zobrazení, tedy $p \circ q$ zobrazí prvek i na $p(q(i))$. Tabulkově vyjádřeno

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ q & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \\ p & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{array}$$

čili

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně můžeme postupovat pomocí popisu přes cykly a dospějeme k vyjádření $p \circ q = (1, 2, 4, 6)(3)(5)$. Pro srovnání, složení v opačném pořadí je $q \circ p = (1, 3, 5, 4)(2)(6)$. To ilustruje, že skládání permutací není komutativní.

Cv. 6.2 Mějme permutaci

$$p = (1, 3, 4)(2, 5)(6, 11, 10, 9, 8, 7).$$

Spočítejte permutace p^9 a p^{-14}.

Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = id$?

Řešení:
Naivní způsob spočítání p^9 je složit postupně permutaci $p^9 = p \circ p \circ p \circ p \circ p \circ p \circ p \circ p \circ p$.

Efektivnější způsob počítání vysokých mocnin (čehokoli) je využití dvojkového zápisu exponentu a iterovaného mocnění na druhou. Konkrétně k permutaci p^9 se dostaneme tak, že spočítáme $p^2 = p \circ p$, následně $p^4 = p^2 \circ p^2$, $p^8 = p^4 \circ p^4$ a nakonec $p^9 = p^8 \circ p$.

V našem případě, kdy mocníme permutace, můžeme využít ještě rozkladu na cykly. Cyklus $p = (u_1, \ldots, u_k)$ délky k se při mocnění chová tak, že $p^k = id$ a $p^{k+1} = p$. To nás vede k metodě, kdy budeme mocnit každý cyklus zvlášť a mocninu daného cyklu spočítáme efektivně s využitím modula jeho délky. Konkrétně, $(1, 3, 4)^9 = id$, $(2, 5)^9 = (2, 5)^1 = (2, 5)$ a $(6, 11, 10, 9, 8, 7)^9 = (6, 11, 10, 9, 8, 7)^3 = (6, 9)(7, 10)(8, 11)$ Tudíž

$$p^9 = (1)(2, 5)(3)(4)(6, 9)(7, 10)(8, 11).$$

Permutaci p^{-14} určíme stejným způsobem s tím, že uvažujeme i záporné exponenty. Tudíž $(1, 3, 4)^{-14} = (1, 3, 4)^1$, $(2, 5)^{-14} = (2, 5)^0 = id$, $(6, 11, 10, 9, 8, 7)^{-14} = (6, 11, 10, 9, 8, 7)^4 = (6, 8, 10)(7, 9, 11)$. Nakonec dostáváme

$$p^{-14} = (1, 3, 4)(2)(5)(6, 8, 10)(7, 9, 11).$$

Abychom určili nejmenší mocninu $k \geq 1$ takovou, že $p^k = id$, podíváme se na jednotlivé cykly a zjistíme, jaké mocniny dají identitu. První cyklus má délku 3, tedy třetí mocnina a jakýkoli její celý násobek dají identitu. Podobně druhý cyklus má délku 2, čili identitu dostaneme pro sudé mocniny, a konečně třetí cyklus délky 6 vede na mocninu 6. Nejmenší společný násobek čísel $2, 3, 6$ je 6, tedy hledané $k = 6$. Při šesté mocnině se první cyklus *protočí* 2-krát, druhý 3-krát a poslední 1-krát.

Cv. 6.3 Rozložte permutaci $(1, 2, 3, 4, 5)$ na složení transpozic, a to alespoň dvěma různými způsoby. Jaký je nejmenší možný počet transpozic, které k rozkladu potřebujeme?

Řešení:
Dvě možná řešení jsou:

$$(1, 2, 3, 4, 5) = (1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 5) = (1, 5)(1, 4)(1, 3)(1, 2).$$

Transpozic musí být alespoň 4. Každá nová transpozice sníží počet cyklů maximálně o 1, takže abychom z identity zkonstruovali cyklus délky 5, potřebujeme alespoň 4 transpozice.

Cv. 6.4 Dokažte, že každou permutaci $p \in S_n$ lze složit pomocí $n-2$ nebo $n-1$ transpozic.

Řešení:

V předchozím cvičení 6.3 jsme viděli, že každý cyklus délky c lze složit pomocí $c-1$ transpozic. Pokud se tedy permutace p skládá z právě k cyklů, tak ji umíme složit z právě $n-k$ transpozic. Tím pádem každou permutaci lze zložit z maximálně $n-1$ transpozic. Pokud počet transpozic je menší než $n-2$, tak přidáme příslušný počet dodatečných (a v zásadě zbytečných) párů transpozic $(i,j)(i,j)$ tak, abychom počet transpozic navýšili na požadovaný počet.

Cv. 6.5 Určete znaménko permutace r zadané tabulkou:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Permutaci r můžeme pomocí cyklů zapsat jako

$$r = \begin{cases} (1,n)(2,n-1)\dots(\frac{n}{2},\frac{n+2}{2}) & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ (1,n)(2,n-1)\dots(\frac{n-1}{2},\frac{n+3}{2})(\frac{n+1}{2}) & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

V prvním případě máme $\frac{n}{2}$ cyklů, v druhém $\frac{n-1}{2}$ cyklů. Celkově tedy dostáváme, že

$$\operatorname{sgn}(r) = (-1)^{n-\text{počet cyklů}} = \begin{cases} (-1)^{n-\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ (-1)^{n-\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Souhrnně můžeme též psát $\operatorname{sgn}(r) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Cv. 6.6 Najděte všechny permutace splňující $p \in S_{10}$ a $p^2 = (1,3)(2,4)(7,8,9,10)$.

Řešení:

Podívejme se nejprve, jak může vzniknout cyklus $(1,3)$. Aby se 1 zobrazilo na 3 v p^2, musí v p být součástí nějaké cyklu $(\dots,1,a,3,\dots)$. Podobně aby se 3 zobrazilo na 1, musí být $(\dots,3,b,1,\dots)$. Spojením obou úseků dostáváme $(\dots,1,a,3,b,1,\dots)$, tedy nutně cyklus $(1,a,3,b)$. V permutaci p^2 se tento cyklus rozpadne na 2 podcykly $(1,3)(a,b)$. Ze struktury p^2 je jediná možnost, že $a = 2, b = 4$ nebo symetricky $a = 4, b = 2$.

Aby se dále prvky 5 a 6 zobrazily v p^2 sami na sebe, musí se buď oba zobrazit sami na sebe už v p, nebo tvořit cyklus o dvou prvcích $(5,c),(6,d)$. Pokud by libovolné z čísel byl součástí delšího cyklu, složením permutace sama se sebou bychom už nedostali (5), resp. (6). Ze struktury p^2 dále nutně vyplývá, že $c = 6$ a $d = 5$, jinak by (d) a (c) nebyly cykly z p^2.

Zbývá určit $p(7),\dots,p(10)$. Podobně jako v případě prvků 1, 3 odvodíme, že musí existovat úsek $(\dots,7,e,8,f,9,g,10,h,7,\dots)$, resp. cyklus $(7,e,8,f,9,q,10,h,7)$, který ale nejsme schopni pouze s pomocí prvků $7,\dots,10$ zkonstruovat. Z toho důvodu žádná permutace p nesplňuje zadání.

Poznámka. Znaménko permutace p^2 je vždy sudé (pro libovolnou permutaci p), neboť platí $\operatorname{sgn}(p^2) = \operatorname{sgn}(p)\operatorname{sgn}(p) = \operatorname{sgn}(p)^2 = 1$. Ale zadaná permutace $(1,3)(2,4)(7,8,9,10)$ má znaménko $(-1)^{10-5} = -1$, tudíž nemůže být druhou mocninou žádné permutace.

Cv. 6.7 Dokažte, že složením permutací dostaneme permutaci.

Řešení:

Abychom dokázali toto tvrzení, stačí ukázat, že složení dvou permutací $p, q \in S_n$ je *prosté* a *na*. Poté se bude jednat o bijekci na konečné množině, což odpovídá definici permutace. Toto půjde jednoduše dokázat z faktu, že obě permutace tyto vlastnosti splňují.

Prosté: Mějme $x, y \in \{1, \dots, n\}$ a nechť platí

$$(p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(q(y)) = (p \circ q)(y).$$

Protože zobrazení p je prosté, platí, že nutně $q(x) = q(y)$. Nyní využijeme toho, že je prosté q a tedy platí, že $x = y$. Tedy i zobrazení $(p \circ q)$ je prosté.

Na: Aby platila tato vlastnost, musí pro každé $x \in \{1, \dots n\}$ existovat prvek $y \in \{1, \dots, n\}$ takový, že $(p \circ q)(y) = p(q(y)) = x$. Protože zobrazení p je „na“, tak existuje $z \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $p(z) = x$. Zároveň z vlastnosti na permutace q existuje y, že $q(y) = z$. Toto y splňuje tedy vztah $q(p(y)) = x$.

Cv. 6.8 Najděte všechny symetrie obdélníku, popište je permutacemi a ověřte, že tvoří podgrupu grupy $(S_4, \circ)$.

Řešení:

Obdélník má čtyři symetrie:

- identita, která odpovídá permutaci $id = (1)(2)(3)(4)$,
- překlopení podle svislé osy odpovídá permutaci $(1, 2)(3, 4)$,
- překlopení podle vodorovné osy odpovídá permutaci $(1, 3)(2, 4)$,
- otočení o $180°$ odpovídá permutaci $(1, 4)(2, 3)$.

Snadno ověříme, že tato množina permutací je uzavřená na inverze a skládání, čili tvoří podgrupu.

Cv. 6.9 Najděte všechny symetrie čtverce, popište je permutacemi a ověřte, že tvoří podgrupu grupy $(S_4, \circ)$.

Řešení:

Analogické předchozímu cvičení 6.8. Kromě tamějších symetrií zde máme navíc:

- překlopení podle diagonály, což odpovídá permutaci $(1, 4)(2)(3)$,
- překlopení podle šikmé diagonály, což odpovídá permutaci $(1)(4)(2, 3)$,
- otočení o $90°$ ve směru hodinových ručiček, což odpovídá $(1, 2, 4, 3)$,
- otočení o $90°$ proti směru hodinových ručiček, což odpovídá $(1, 3, 4, 2)$.

Opět ověříme, že tato množina osmi permutací je uzavřená na inverze a skládání, takže tvoří podgrupu.

7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Cv. 7.1 Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ tvoří množina

$$S_a = \{(x, y, z)^T;\ x + 2y - 3z = a\}$$

vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$. Kolik má tento vektorový podprostor prvků?

Řešení:
Pokud S_a má být vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$, tak musí obsahovat nulový vektor, tedy $(0, 0, 0)^T$. Vidíme tedy, že musí platit $a = 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$. Dále tedy předpokládejme, že $a = 0$. Dokažme nyní, že v takovém případě o vektorový podprostor jde. K tomu stačí ověřit uzavřenost na násobky prvky ze $\mathbb{Z}_7$ a na sčítání vektorů.

Uzavřenost na násobky Je-li $(x, y, z) \in S_0$ a $\alpha \in \mathbb{Z}_7$, tak $\alpha x + 2\alpha y - 3\alpha z = \alpha(x + 2y - 3z) = \alpha \cdot 0 = 0$, a tedy i $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in S_0$.

Uzavřenost na sčítání Pro $(x, y, z) \in S_0$ a $(x', y', z') \in S_0$, díky distributivitě, komutativitě a asociativitě sčítání v $\mathbb{Z}_7$ platí $(x+x')+2(y+y')-3(z+z') = (x+2y-3z)+(x'+2y'-3z) = 0+0 = 0$, a tedy i $(x+x', y+y', z+z') \in S_0$.

Nyní spočteme počet prvků S_0. Pro libovolnou volbu x a y dostáváme právě jeden prvek z (totiž $\frac{x+2y}{3} = 5x + 3y$), který splňuje $x + 2y - 3z = 0$. Jelikož máme 7 možností pro x a 7 možností pro y, podprostor S_0 má celkem $7 \cdot 7 = 49$ prvků.

Závěr: O vektorový prostor se jedná pouze pro $a = 0$, v kterémžto případě má tento prostor 49 prvků.

Cv. 7.2 Nad $\mathbb{Z}_{11}$ určete průnik řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ a lineárního obalu množiny vektorů $\{v_1, v_2, v_3\}$, přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Nejprve vyřešíme danou soustavu rovnic.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Množina všech řešení tedy vychází $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{Z}_{11} \right\}$.

Musíme zjistit, které z těchto vektorů se dají vyjádřit jako $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$, kde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_{11}$. Označíme-li $w_1 := (8, 6, 0, 1)^T$ a $w_2 = (0, 4, 1, 0)^T$, máme vlastně vyřešit rovnici $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3 = rw_1+sw_2$, neboli $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+r(-w_1)+s(-w_2) = 0$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-8&0\\2&2&0&-6&-4\\1&3&9&0&-1\\1&1&0&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-8&0\\0&2&-2&10&-4\\0&3&8&8&-1\\0&1&-1&7&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-8&0\\0&1&-1&5&-2\\0&3&8&8&-1\\0&1&-1&7&0\end{pmatrix}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-8&0\\0&1&-1&5&-2\\0&0&0&4&5\\0&0&0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-8&0\\0&1&-1&5&-2\\0&0&0&1&4\\0&0&0&2&2\end{pmatrix}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-8&0\\0&1&-1&5&-2\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&-6\end{pmatrix},$$

z čehož vidíme, že $r = 0$ a $s = 0$, neboli jediným vektorem v průniku je $0\cdot w_1 + 0\cdot w_2$, čili nulový vektor.

Cv. 7.3 Tvoří všechny polynomy proměnné X s koeficienty nad $\mathbb{Z}_3$ stupně nejvýše 10 vektorový prostor? Kolik má tento prostor prvků?

<u>Řešení:</u>
Ano, 3^{11}.

Cv. 7.4 Nad $\mathbb{Z}_7$ určete, kolik prvků má následující průnik lineárních obalů

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}6\\2\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\5\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\6\\3\end{pmatrix}\right\}\bigcap\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}5\\0\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\6\\6\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

<u>Řešení:</u>
Označme dané vektory v_1, v_2, v_3 a w_1, w_2, w_3. Nyní stačí vyřešit rovnici $xv_1 + yv_2 + zv_3 = rw_1 + sw_2 + tw_3$, podívat se, jaké možné kombinace hodnot r, s, t vyšly a těmi přenásobit w_1, w_2, w_3. (Pokud by dané vektory byly lineárně závislé, mohlo by se stát, že více řešení dá ten samý vektor.) Odpověď: 49.

Cv. 7.5 Uvažme vektorový prostor všech funkcí z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}_2$. Pro $i \in \mathbb{N}$ buď a_i funkce, která prvek i zobrazí na 1 a vše ostatní na 0. Buď b funkce, která vše zobrazí na jedničku. Leží b v lineárním obalu $\operatorname{span}\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$?

<u>Řešení:</u>
Neleží, v lineárním obalu leží jen lineární kombinace konečného počtu vektorů, a to b není.

Cv. 7.6 Je-li $\mathbb{T}$ (komutativní) těleso, tak každý podprostor $\mathbb{T}^n$ lze popsat dvěma různými způsoby: Buď jakožto řešení systému rovnic, nebo jako lineární obal nějakých vektorů.

(a) Nad $\mathbb{Q}$ popište řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

jako lineární obal vektorů.

Řešení:
Jde vlastně o to, vyřešit danou soustavu rovnic. Řešení lze zapsat např. ve tvaru

$$\{r \cdot (0, 1, -2, 0)^T + s \cdot (6, 1, 0, -2)^T;\ r, s \in \mathbb{Q}\}.$$

Tedy výsledkem je $\operatorname{span}\{(0, 1, -2, 0)^T,\ (6, 1, 0, -2)^T\}$.

(b) Najděte soustavu rovnic, jejímž řešením bude lineární obal vektorů

$$(1, 2, -1, 0)^T \ \text{ a } \ (1, 0, 0, 1)^T.$$

Řešení:
Hledáme vlastně taková čísla a, b, c, d, aby platilo

$$\begin{aligned} 1 \cdot a + 2 \cdot b - 1 \cdot c + 0 &= 0, \\ 1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 1 \cdot d &= 0. \end{aligned}$$

Jinými slovy řešíme homogenní rovnici s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nestačí však najít jedno řešení (to by množina řešení výsledné soustavy mohla vyjít větší než onen požadovaný lineární obal).
Výsledkem je například homogenní soustava $Ax = 0$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Lineární závislost a nezávislost

Cv. 8.1 Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2, 3, -5)$, $(1, -1, 1)$, $(3, 2, -2)$.

(b) $(2, 0, 3)$, $(1, -1, 1)$, $(0, 2, 1)$.

Řešení:

(a) Hledáme koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho tedy dostaneme soustavu

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Všimněte si, že jednotlivé vektory jsou ve sloupcích matice. Vyřešením soustavy zjistíme, že má řešení pouze $a = b = c = 0$. Vektory jsou tedy lineárně nezávislé.

(b) Obdobně jako v (a) vytvoříme soustavu

$$\left(\begin{array}{lrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Pomocí Gaussovy eliminace dostaneme

$$\left(\begin{array}{lrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustava má tedy i nějaké netriviální řešení a vektory jsou tedy lineárně závislé. Pro úplnost doplníme, že řešení soustavy je $a = -t$, $b = 2t$, $c = t$ pro parametr $t \in \mathbb{R}$. Tedy například s koeficienty -1, 2 a 1 dostaneme

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 8.2 Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

(a) $\{u,\ u + v,\ u + w\}$.

(b) $\{u - v,\ u - w,\ v - w\}$.

Řešení:

(a) Obdobně jako v předchozím příkladě hledáme koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, aby

$$0 = au + b(u + v) + c(u + w) = (a + b + c)u + bv + cw.$$

Protože u, v, w jsou lineárně nezávislé, musí být $a+b+c = 0$, $b = 0$ a $c = 0$ a tedy i $a = 0$. Odtud je $\{u, u + v, u + w\}$ lineárně nezávislá.

(b) Obdobně jako v předchozím případě hledáme $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$0 = a(u - v) + b(u - w) + c(v - w) = (a + b)u + (-a + c)v + (-b - c)w.$$

Tedy $a+b = 0$, $-a+c = 0$ a $-b-c = 0$. Vyřešením dané soustavy dostaneme řešení $a = t, b = -t, c = t$ pro parametr $t \in \mathbb{R}$. Vektory $\{u-v, u-w, v-w\}$ jsou tedy lineárně závislé, např. s koeficienty $(1, -1, 1)^T$.

Cv. 8.3 Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a nechť $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, je Y závislá.

(b) Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.

(c) Je-li X závislá, je Y závislá.

(d) Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.

(e) Je-li Y závislá, je X závislá.

Řešení:

Obecně dle definice se nezávislost přenáší „dolů“ a závislost „nahoru“. Konkrétně:

(a) Neplatí: $X = \{(1, 0)^T\}$ a $Y = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$ jsou obě nezávislé v $\mathbb{R}^2$.

(b) Neplatí: $X = \{(1, 0)^T\}$ je nezávislá, ale $Y = \{(1, 0)^T, (2, 0)^T\}$ je už závislá v $\mathbb{R}^2$.

(c) Platí. Mějme $X = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ a $Y = \{v_1, \dots, v_\ell, w_1 \dots, w_k\}$. Podle předpokladu je množina X závislá, tedy existují $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{T}$ takové, že $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \neq (0, \dots, 0)$ a

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_i = 0.$$

Vezměme $\beta_1, \dots, \beta_k = (0, \dots, 0)$. Pak stále platí, že $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_k) \neq (0, \dots, 0)$ a

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j w_j = 0$$

je netriviální lineární kombinace vektorů z Y, která se rovná 0. Množina Y je tedy také lineární závislá.

(d) Platí. Jde o obměnu bodu (c).

(e) Neplatí: $Y = \{(1, 0)^T, (2, 0)^T\}$ je závislá, ale $X = \{(1, 0)^T\}$ je nezávislá v $\mathbb{R}^2$.

Cv. 8.4 Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T$, $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,0,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Řešení:
Úlohu řešíme stejně jako ve cvičení 8.1, jen jednou počítáme nad tělesem $\mathbb{R}$ a podruhé nad $\mathbb{Z}_3$. Zjistíme, že nad $\mathbb{R}$ jsou vektory lineárně nezávislé a nad $\mathbb{Z}_3$ jsou lineárně závislé. Vidíme tedy, že lineární závislost/nezávislost závisí na volbě tělesa, nad kterým je daný vektorový prostor.

Cv. 8.5 Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{0\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

Řešení:
Mějme 2 vyjádření vektoru x:

$$u_1 + v_1 = x = u_2 + v_2$$

pro $u_1, u_2 \in U$ a $v_1, v_2 \in V$. Rovnost upravíme na

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1.$$

Vektor $u_1 - u_2$ leží v U a vektor $v_2 - v_1$ leží ve V.

Pokud tedy $U \cap V = \{0\}$, pak $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0$. Z čehož, ale vyplývá, že $u_1 = u_2$ a $v_1 = v_2$ a vyjádření x tedy je jednoznačné.

Na druhou stranu, pokud vyjádření x není jednoznačné, pak $u_1 \neq u_2$ nebo $v_1 \neq v_2$ (ve skutečnosti musí nastat obě možnosti). Nechť tedy $u_1 \neq u_2$ (druhý případ je obdobný). Pak ale $u_1 - u_2 \neq 0$. Vektor $u_1 - u_2$ však leží jak v U tak ve V. Průnik $U \cap V$ tedy obsahuje i nenulový vektor.

Cv. 8.6 Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x - 1,\ x - 2,\ 3x\}$.
(b) $\{x^2 + 2x + 3,\ x + 1,\ x - 1\}$.
(c) $\{\sin x,\ \cos x\}$.
(d) $\{\sin(x + 1),\ \sin(x + 2),\ \sin(x + 3)\}$.
(e) $\{\ln(x),\ \log_{10}(2x),\ \log_2(x^2)\}$.

Řešení:

(a) Označme $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x - 2$ a $h(x) = 3x$. Pak hledáme $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že $a \cdot f(x) + b \cdot g(x) + c \cdot h(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Pokud tedy dosadíme za f, g a h dostaneme:

$$a \cdot (2x - 1) + b \cdot (x - 2) + c \cdot 3x = (2a + b + 3c) \cdot x + (-a - 2b) = 0.$$

Rovnost je splněna pro všechna x právě tehdy když:

$$\begin{aligned} 2a + b + 3c &= 0, \\ -a - 2b &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava má netriviální řešení například $(-2, 1, 1)$. Funkce jsou tedy lineárně závislé.

(b) Opět hledáme $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$a \cdot (x^2 + 2x + 3) + b \cdot (x + 1) + c \cdot (x - 1) = 0,$$

neboli

$$a \cdot x^2 + (2a + b + c) \cdot x + (3a + b - c) = 0.$$

Z toho dostaneme homogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Tato soustava má jen triviální řešení $(0, 0, 0)$. Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

(c) Snažíme se splnit rovnici $a \sin x + b \cos x = 0$. Pokud dosadíme $x = 0$, pak dostaneme $b = 0$, protože $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$. Pokud dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$, pak dostaneme $a = 0$, protože $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ a $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

(d) Ze součtových vzorců pro $\sin x$ máme:

$$\begin{aligned} \sin(x + 1) &= \sin(x) \cdot \cos(1) + \cos(x) \cdot \sin(1), \\ \sin(x + 2) &= \sin(x) \cdot \cos(2) + \cos(x) \cdot \sin(2), \\ \sin(x + 3) &= \sin(x) \cdot \cos(3) + \cos(x) \cdot \sin(3). \end{aligned}$$

Sestavíme tedy rovnici

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot \sin(x + 1) + b \cdot \sin(x + 2) + c \cdot \sin(x + 3) \\ &= \big(a \cdot \cos(1) + b \cdot \cos(2) + c \cdot \cos(3)\big) \cdot \sin(x) \\ &\quad + \big(a \cdot \sin(1) + b \cdot \sin(2) + c \cdot \sin(3)\big) \cdot \cos(x). \end{aligned}$$

Jelikož jsou sin a cos lineárně nezávislé, pak musí platit:

$$\begin{aligned} a \cdot \cos(1) + b \cdot \cos(2) + c \cdot \cos(3) &= 0, \\ a \cdot \sin(1) + b \cdot \sin(2) + c \cdot \sin(3) &= 0. \end{aligned}$$

Což je homogenní soustava o 2 rovnicích a 3 neznámých, musí mít tedy nějaké netriviální řešení. Funkce jsou tedy lineárně závislé.

(e) Platí následující rovnosti: $\log_{10}(2x) = \frac{\ln x + \ln 2}{\ln 10}$ a $\log_2(x^2) = \frac{2 \ln x}{\ln 2}$. V rovnici $a \cdot \ln(x) + b \cdot \log_{10}(2x) + c \cdot \log_2(x^2) = 0$ jsou první a poslední člen vzájemnými násobky. Rovnice má tedy netriviální řešení, například $(a, b, c) = (-2, 0, \ln 2)$. Funkce jsou tedy lineárně závislé.

9. Báze a dimenze

Cv. 9.1 Ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ vyjádřete vektor $(3,2,4)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(3,3,2)^T$, $(1,1,4^T)$ a $(0,2,1)^T$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Řešení:
Vyřešíme soustavu rovnic, která vznikne tak, že vektory $(3,3,2)^T$, $(1,1,4)^T$ a $(0,2,1)^T$ dáme do sloupců matice a vektor $(3,2,4)^T$ použijeme jako vektor pravé strany.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Dostaneme řešení $x_3 = 2$, $x_2 = p$ a $x_1 = 1 + 3p$ tedy:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1+3p)\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení tedy není jednoznačné a vektory $(3,3,2)^T$, $(1,1,4)^T$ a $(0,2,1)^T$ netvoří bázi prostoru $\mathbb{Z}_5^3$.

Cv. 9.2 Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V.

(a) $M = \{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

(b) $M = \{-x^2,\ x+x^2,\ x^3-1\}$, V je prostor reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Řešení:

(a) Prostor V má dimenzi 4, proto je třeba rozšířit M o jeden vektor (pokud je množina M lineárně nezávislá). Z věty o výměně platí, že alespoň jeden z vektorů kanonické báze je nezávislý na vektorech z M. Nezávislost zjistíme současným vyřešením rovnic $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = e_i$, kde u_1, u_2, u_3 jsou vektory z M a e_i jsou vektory kanonické báze. Dostáváme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 6 & -1 \end{array}\right).$$

Protože poslední řádek obsahuje pivot ve všech sloupcích na pravé straně, vidíme, že doplněním o libovolný vektor e_i se stane množina M bází prostoru $\mathbb{R}^4$.

(b) Zkusíme doplnit M o některý vektor z kanonické báze $1, x, x^2, x^3$. Máme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Zde vidíme, že buď $M \cup \{1\}$ nebo $M \cup \{x^3\}$ (a i mnoho jiných možností, které jsme však netestovali) tvoří bázi V, nikoli však $M \cup \{x\}$ nebo $M \cup \{x^2\}$.

Cv. 9.3 Souřadnice vektoru u vůči bázi $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = \{v_1 + v_4,\ v_2 + v_3,\ v_4,\ v_2\}$.

Řešení:
Hledáme taková $(b_1, \ldots, b_4)^T = [u]_Y$, aby platilo

$$b_1(v_1 + v_4) + b_2(v_2 + v_3) + b_3 v_4 + b_4 v_2 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4.$$

Protože je X báze, jsou koeficienty u v_i jsou jednoznačné. Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 + b_4 &= a_2 \\ b_2 &= a_3 \\ b_1 + b_3 &= a_4 \end{aligned}$$

Nové souřadnice jsou $[u]_Y = (a_1,\ a_3,\ a_4 - a_1,\ a_2 - a_3)^T$.

Cv. 9.4 Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_5^7$.

(a) $U = \operatorname{span}\big\{(4,1,0,3,4,0,0)^T, (4,3,1,0,2,3,1)^T, (4,1,4,0,3,2,4)^T, (2,4,1,4,4,3,1)^T, (0,4,3,2,2,4,3)^T\big\}$.

(b) $V = \big\{(x_1, \ldots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0,\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0,\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\big\}$.

Řešení:

(a) Z generátorů sestavíme matici (vektory změníme na řádkové) a tuto matici převedeme na odstupňovaný tvar. Elementární úpravy nemění řádkový prostor, výsledné nenulové řádky tvoří tedy hledanou bázi.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimenze U je tedy 3 a báze U je např. $(1,2,3,2,2,4,3)^T, (0,1,1,0,2,3,1)^T, (0,0,1,3,1,3,1)^T$.

(b) Z rovnic sestavíme soustavu a budeme hledat bázi jejího řešení. Konkrétně dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešením je

$$\begin{aligned} x = {} & p_1(2,1,0,0,0,0,0)^T + p_2(1,0,2,1,0,0,0)^T + \\ & + p_3(1,0,1,0,1,0,0)^T + p_4(1,0,4,0,0,3,1)^T. \end{aligned}$$

Vektory u parametrů tvoří bázi prostoru řešení, mj. je okamžitě vidět, že dimenze tohoto prostoru je rovna počtu volných proměnných.

Dimenze V je tedy 4 a báze V je např. $(2,1,0,0,0,0,0)^T$, $(1,0,2,1,0,0,0)^T$, $(1,0,1,0,1,0,0)^T$, $(1,0,4,0,0,3,1)^T$.

Cv. 9.5 Rozhodněte, zda prostory U a V z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

<u>Řešení:</u>

Dimenze podprostoru je menší než dimenze prostoru. Dimenze jsme již určili dříve v předchozím příkladu, můžeme tedy okamžitě vyloučit případ $V \subseteq U$. Zbývá ověřit, zdali jsou prostory v opačné inkluzi, nebo jsou-li inkluzí neporovnatelné. K tomu stačí zjistit, jestli $\dim(\mathrm{span}(U \cup V)) = \dim(V) = 4$.

Popřípadě se také můžeme pokusit vyjádřit vektory báze menšího prostoru jako lineární kombinace větší báze (což je vlastně totéž).

$$\begin{array}{|cccc|ccccccc|}
\multicolumn{4}{c|}{} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\multicolumn{4}{c|}{} & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\multicolumn{4}{c|}{} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\multicolumn{4}{c|}{} & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 1 \\
\hline
2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\
0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Zde řádky první matice udávají souřadnice vektorů báze U vůči bázi V (obě tyto báze jsme si zvolili výše). Všimněte si, že se souřadnice dají snadno určit z 2., 4., 5. a 7. složky vektoru a uvědomte si proč.

Pro rozšíření báze vyjdeme z libovolné báze menšího prostoru a přidáváme vektory z většího, dokud nedostaneme požadovanou dimenzi.

Platí inkluze $U \subsetneq V$. Tato inkluze se dá nahlédnout i snáze, protože všechny vektory báze U splňují rovnice z definice V.

10. Maticové prostory

Cv. 10.1 Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

(a) $(1,2)^T \in \mathrm{Ker}(A)$,

(b) $(1,2)^T \in \mathcal{S}(A)$.

Řešení:
Z definice jádra a sloupcového prostoru matice platí

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A) &= \{x \in \mathbb{T}^n;\ Ax = o\}, \\ \mathcal{S}(A) &= \mathrm{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\} = \{Ax;\ x \in \mathbb{T}^n\}, \end{aligned}$$

stačí tedy ověřit, zda vektor $(1,2)^T$ řeší soustavu $Ax = o$ nad daným tělesem a zda platí $Ax = (1,2)^T$ pro nějaké $x \in \mathbb{T}^2$.

Nad tělesem $\mathbb{R}$:

(a) vektor $(1,2)^T$ nepatří do jádra matice A, protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor $(1,2)^T$ patří do sloupcového prostoru matice A, protože soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

má řešení, konkrétně platí $(1,2)^T = \frac{3}{5}(1,3)^T + \frac{1}{5}(2,1)^T$.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

(a) vektor $(1,2)^T$ patří do $\mathrm{Ker}(A)$, protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor $(1,2)^T$ nepatří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

nemá nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ řešení.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_7$:

(a) vektor $(1,2)^T$ nepatří $\mathrm{Ker}(A)$, protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor $(1,2)^T$ patří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{array}\right)$$

má nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ řešení a platí $(1,2)^T = 2(1,3)^T + 3(2,1)^T$.

Cv. 10.2 Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 1 & 3\\ 3 & 6 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

<u>Řešení:</u>

Převedeme matici A do odstupňovaného tvaru:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 1 & 3\\ 3 & 6 & 1 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ tvoří (například) nenulové vektory v řádcích výsledné matice, tedy $(1,2,0,1)^T, (0,0,1,1)^T$.

Bázi sloupcového prostoru můžeme vybrat z původních sloupců matice A, které odpovídají bázickým sloupcům odstupňovaného tvaru. Bázické sloupce jsou první a třetí, tedy vektory $(1,2,3)^T$ a $(2,1,1)^T$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$.

Bázi jádra matice A získáme z řešení soustavy $Ax = o$. Množinu všech řešení této soustavy můžeme vyjádřit pomocí nebázických proměnných x_2, x_4 ve tvaru

$$(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4)^T = (-2,1,0,0)^T x_2 + (-1,0,-1,1)^T x_4.$$

Bázi $\mathrm{Ker}(A)$ tedy tvoří např. vektory $(-2,1,0,0)^T$, $(-1,0,-1,1)^T$.

Cv. 10.3 Najděte matici A takovou, že

(a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1,1)^T, (1,2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$,

(b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1,1,1)^T$ a báze $\mathrm{Ker}(A)$ je $(1,-2,1)^T$.

<u>Řešení:</u>

(a) Ze zadaných vektorů v řádkovém a sloupcovém prostoru vidíme, že hledáme matici 3×2. Požadovanou vlastnost splňují např. matice

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) V tomto případě hledáme matici 3×3, pro kterou platí

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \mathrm{rank}(A) = \dim \mathrm{Ker}(A) = 1.$$

Z věty o dimenzi jádra a hodnosti matice ale víme, že pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ musí platit vztah

$$\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n.$$

Matice splňující požadované vlastnosti tedy neexistuje.

Cv. 10.4 Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

(a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$,

(b) $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Řešení:

(a) Tvrzení neplatí, např. matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mají stejný sloupcový prostor

$$\mathrm{span}\{(1,0)^T, (0,0)^T\} = \mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B) = \mathrm{span}\{(0,0)^T, (1,0)^T\},$$

ale jejich redukované odstupňované tvary jsou různé (obě matice jsou v RREF).

(b) Neplatí ani opačná implikace, např. pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

máme $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B) = A$, ale zároveň

$$\mathrm{span}\left\{(1,0)^T, (0,0)^T\right\} = \mathcal{S}(A) \neq \mathcal{S}(B) = \mathrm{span}\left\{(0,1)^T, (0,0)^T\right\}.$$

Cv. 10.5 Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3,1,5,4)^T,\ v_2 = (2,2,3,3)^T,\ v_3 = (1,-1,2,1)^T,\ v_4 = (1,3,1,1)^T.$$

Řešení:
Zapíšeme jednotlivé vektory do sloupců matice a převedeme ji do (redukovaného) odstupňovaného tvaru

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že bázické sloupce jsou první, druhý a čtvrtý, bázi prostoru $\mathcal{S}(A) = V$ tedy tvoří původní vektory $v_1 = (3,1,5,4)^T$, $v_2 = (2,2,3,3)^T$ a $v_4 = (1,3,1,1)^T$.

Ze třetího sloupce upravené matice dostaneme souřadnice vektoru v_3 vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_4\}$, platí

$$v_3 = (1,-1,2,1)^T = 1 \cdot (3,1,5,4)^T + (-1) \cdot (2,2,3,3)^T,$$

a tedy $[v_3]_B = (1,-1,0)$.

Cv. 10.6 Rozhodněte, zda platí $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *(Hint: Jaký je vztah mezi $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ a $\mathcal{S}(A+B)$?)*

Řešení:
Uvažujme prostor generovaný sjednocením sloupců matice A a sloupců matice B, tedy spojení $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Dimenze tohoto prostoru je nanejvýš

$$\dim \mathcal{S}(A) + \dim \mathcal{S}(B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

Dále, prostor $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ obsahuje všechny vektory generované sloupci matice $A+B$, tedy $\mathcal{S}(A+B)$ je podprostorem $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Platí proto

$$\operatorname{rank}(A+B) = \dim \mathcal{S}(A+B) \leq \dim \mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

Cv. 10.7 Jaký je vztah mezi prostory $\operatorname{Ker}(AB)$ a $\operatorname{Ker}(B)$ pro matice

(a) $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$,

(b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$?

Řešení:

(a) Nechť $x \in \operatorname{Ker}(B)$, pak z definice jádra platí $Bx = o$. Vektor x patří také do jádra matice AB, protože

$$(AB)x = A(Bx) = Ao = o,$$

dostaneme tedy inkluzi $\operatorname{Ker}(B) \subseteq \operatorname{Ker}(AB)$. Obrácená inkluze obecně neplatí, např. pro $A = 0_n$ a $B = I_n$ je vektor $y = (1, 0, \ldots, 0)^T$ v jádru matice AB, ale nikoliv v jádru matice B.

(b) Nahlédneme, že pro regulární matici A platí také inkluze $\operatorname{Ker}(AB) \subseteq \operatorname{Ker}(B)$, a tedy $\operatorname{Ker}(AB) = \operatorname{Ker}(B)$. Nechť $x \in \operatorname{Ker}(AB)$, potom $(AB)x = o$. Z regularity matice A existuje inverzní matice A^{-1}, pro kterou platí

$$Bx = (A^{-1}A)Bx = A^{-1}((A\ B)x) = A^{-1}o\ = o,$$

z čehož plyne $x \in \operatorname{Ker}(B)$.

11. Lineární zobrazení, matice vzhledem ke kanonické bázi

Cv. 11.1 Rozhodněte a dokažte, zda-li zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je/není lineárním zobrazením.

(a) $f_1(x) = 0$,
(b) $f_2(x) = 1$,
(c) $f_3(x) = 2x$,
(d) $f_4(x) = x + 1$,
(e) $f_5(x) = x^2$.

Řešení:
Dle definice: Buďte U, V vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{T}$. Zobrazení $f\colon U \to V$ je lineární, pokud pro každé $x, y \in U$ a $\alpha \in T$ platí:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Poznámka: Budeme-li na vektorové prostory nahlížet jako na *algebry*, pak je lineární zobrazení *homomorfismem* algeber, což nám z algebraického hlediska přináší silný pohled a interpretaci lineárního zobrazení, jako zobrazení zachovávajícího strukturu.

(a) Ověříme platnost podmínek lineárního zobrazení z definice:
   i. $f_1(x + y) = f_1(z) = 0 = 0 + 0 = f_1(x) + f_1(y)$ podmínka platí
   ii. $f_1(\alpha x) = f_1(w) = 0 = \alpha 0 = \alpha f_1(x)$ podmínka platí.

   Obě podmínky jsou splněny, zobrazení f_1 je tudíž lineární.

(b) Analogicky ověříme podmínky u zobrazení f_2:
   i. $f_2(x + y) = f_2(z) = 1 \neq 2 = 1 + 1 = f_2(x) + f_2(y)$ podmínka neplatí
   ii. dále bychom již nemuseli počítat, ale pro zajímavost prozkoumáme, zda-li zobrazení homomorfní k druhé operaci „násobení skalárem z tělesa“ $f_2(\alpha x) = f_2(w) = 1 \neq \alpha = \alpha 1 = \alpha f_2(x)$, pro obecné $\alpha \in R$ podmínka neplatí.

   Ani jedna podmínka není splněna, zobrazení proto není lineární.

(c) Postup u zobrazení f_3 je také analogický:
   i. $f_3(x + y) = f_3(z) = 2z = 2(x + y) = 2(x) + 2(y) = f_3(x) + f_3(y)$; podmínka platí
   ii. $f_3(\alpha x) = f_3(w) = 2w = 2\alpha x = \alpha 2x = \alpha f_3(x)$; podmínka platí.

   Obě podmínky jsou splněny, zobrazení je lineární.

Cv. 11.2 Rozhodněte a dokažte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je/není lineární zobrazení.

(a) $f_6(x, y) = (x + y,\, x - y)$,

(b) $f_7(x, y) = (x - y,\, x - y)$.

Řešení:

(a) Analogicky se předchozím příkladem, je však třeba si dát pozor na indexování vektorů. Ano zobrazení f_6 je lineární.

Cv. 11.3 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané přepisem $f(x, y) = (x + y,\, x - y)^T$ vypočtěte matici lineárního zobrazení (vůči kanonické bázi).

Řešení:
Navrhneme dva způsoby výpočtu matice zobrazení:

(a) Využijeme tvrzení, že lineární zobrazení je popsáno obrazem báze. Zobrazení si vyjádříme vůči kanonickým bázím ${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}}$. Vybereme kanonickou bázi $\mathbb{R}^2$, kterou zobrazením zobrazíme

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)_{\text{kan}} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\text{kan}}, \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)_{\text{kan}} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{\text{kan}}.$$

Vyjádřeno vůči kanonické bázi se matice obrazu nezmění je tedy se jedná o matici zobrazení

$${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}.$$

(b) Budeme počítat matici zobrazení vůči kanonickým bázím ${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}}$. A využijeme vyjádření ze znalosti vzoru X a obrazu $FX = Y$.

$$f(X) = f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}.$$

Ze vztahu $F = YX^{-1}$ vypočteme matici zobrazení

$$F = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}.$$

Cv. 11.4 Vypočtěte matici F lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které po řadě zobrazí vektory:

$$\begin{aligned} f((-1, -3, 1)^T) &= (-1, 1, 0)^T,\\ f((0, 3, -2)^T) &= (0, 1, -1)^T,\\ f((-1, -2, 2)^T) &= (1, 0, 1^T). \end{aligned}$$

Řešení:
Matici lineárních zobrazení lze vypočítat i ze znalosti vektorů a jejich obrazů. Mějme množinu vektorů X a jejich obrazů Y. Vektory X je na vektory Y zobrazí maticí lineárního zobrazení F pronásobením $FX = Y$. Je-li matice X regulární, pak existuje její inverzní matice X^{-1}. Upravíme rovnici pronásobením maticí X^{-1} zprava, dostáváme $FXX^{-1} = YX^{-1}$, což se rovná $F = YX^{-1}$.

Matice X je maticí vzorových vektorů zapsaných po sloupcích a matice Y je po sloupcích zapsanou maticí obrazů vektorů:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice X^{-1} k matici X se rovná:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -5 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Výsledná matice zobrazení F se rovná:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

Cv. 12.1 Mějme vektorový prostor $U = \mathbb{R}^3$ a zobrazení $f\colon U \to U$ a mějme jeho bázi

$$B_U = \{(-1,0,3)^T, (2,-2,2)^T, (0,1,-3)^T\}.$$

Vypočtěte matici $F = {}_{B_U}[f]_{B_U}$ lineárního zobrazení f, o kterém víme, že zobrazí bazické vektory:

$$\begin{aligned} f((-1,0,3)^T) &= (-2,0,6)^T \\ f((2,-2,2)^T) &= (4,-4,4)^T \\ f((0,1,-3)^T) &= (0,2,-6)^T \end{aligned}$$

Všimněme si, že vektory jsou „2-krát zvětšeny“.

Maticí F, reprezentující lineární zobrazení f, zobrazte vektor $[x]_{B_U} = (1,2,-1)^T$, tj. dostaneme vektor $[f(x)]_{B_U}$.

Řešení:

Využijeme definice matice lineárního zobrazení, maticové reprezentace lineárního zobrazení a také tvrzení, že každé lineární zobrazení je definováno obrazem báze. Nejprve si připomeneme konstrukci matice lineárního zobrazení obecně, následně ji uchopíme intuitivně a nakonec do obecné konstrukce dosadíme konkrétní zadání úlohy.

Mějme vektorové prostory U a V na tělesem T a lineární zobrazení $f\colon U \to V$. Vektorový prostor U je popsán bází $B_U = \{x_1,\dots,x_n\}$ a vektorový prostor V je popsán bází $B_V = \{y_1,\dots,y_m\}$. *Matice lineárního zobrazení* $f\colon U \to V$ je definována tak, že j-tý sloupec ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je $[f(x_j)]_{B_V}$.

Intuitivně: matici lineárního zobrazení konstruujeme tak, že j-tý sloupec matice je tvořen souřadnicemi zobrazeného vektoru x_j vůči bázi B_V, resp. sloupcový vektor x_j zobrazíme a dostáváme vektor $f(x_j)$ a tento obraz vyjádříme vůči bázi B_V tj. dostáváme sloupcový vektor zmíněné $[f(x_j)]_{B_V}$. Matici konstruujme postupně přes všechny bazické vektory.

Otázka pro lehké rozmyšlení a ověření si, že konstrukci matice lineárního zobrazení rozumíme: máme-li n vektorů báze B_U a m vektorů báze B_V kolik bude mít výsledná matice F sloupců a kolik řádků? Proč lze každé lineární zobrazení zapsat maticově?

Zpět k řešení příkladu. Konstruujeme matici lineárního zobrazení ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ z definice. V konkrétním zadání příkladu zobrazení $f\colon U \to U$ tedy počítáme s jednou bází a jedním vektorovým prostorem. Ukážeme si výpočet prvního sloupce matice F. Mějme první bazický vektor, tj. $x_1 = (-1,0,3)^T$, který se zobrazí zobrazením $f((-1,0,3)^T) = (-2,0,6)^T$. Následně vektor $f(x_1)$ vyjádříme vůči bázi B_U. Řešíme soustavu lineárních rovnic $Ax = b$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & f(x_1) \\ | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

přičemž vektory byly napsány jako sloupce matice, vektory báze B_U jako levá část matice a vektor $f(x_1)$ jako vektor pravé strany matice.

Povšimněme si, že podle sloupcové interpretace řešení soustavy lineárních rovnic platí, že má-li soustava řešení, pravá strana matice b je rovna lineární kombinaci sloupců matice, přičemž jednotlivé proměnné x jsou koeficienty této lineární kombinace a geometricky určují „míru naškálování“ příslušných sloupců matice. Tedy díváme-li se na sloupce matice soustavy jako na bázi, tak výsledný vektor řešení x udává souřadnice vektoru pravé strany b vůči bázi dané sloupci matice, tj. $[b]_{S(A)} = x$. (V případě, že sloupce matice netvoří bázi, jsou ale generátory $S(A)$ a stále platí $b \in \mathcal{S}(A)$, pak se nejedná o souřadnice ale o koeficienty lineární závislosti.)

Výpočet vyjádření vektorů vůči bázi lze provést paralelně:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{U_1} & B_{U_2} & B_{U_3} & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 6 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Sloupcové vektory pravé strany matice, tj. řešení soustavy, tvoří sloupce hledané matice lineárního zobrazení F:

$$F = {}_{B_U}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Intuitivně: Vypočítali jsme matici zobrazení, která zobrazuje vektor x vyjádřený vůči bází B_U, provede s ním transformaci (2-krát zvětší) a ponechá ho vyjádřený vůči bázi B_U. Jedná se o matici škálování, které libovolný vektor naškáluje 2-krát.

Otázka: Matice škálování vypadá „povědomě“ či „očekávatelně“. Jakou roli v tomto zobrazení hraje báze? Jak se změní matice zobrazení, změníme-li bázi resp. budeme-li mít matici zobrazení vůči jiné bázi ${}_{B_V}[f]_{B_V}$? Změní se vůbec? Na tomto místě si můžete udělat alespoň odhad.

Zobrazení vektoru $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ provedeme zobrazením

$$[f(x)]_{B_U} = F \cdot [x]_{B_U} = (2, 4, -2)^T.$$

Cv. 12.2 Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru U daného bází $B_U = \{x_1 = (-1, 0, 3)^T, x_2 = (2, -2, 2)^T, x_3 = (0, 1, -3)^T\}$ do jiného vektorového prostoru V daného bází $B_V = \{y_1 = (-1, 1, 0)^T, y_2 = (0, 1, -1)^T, y_3 = (1, 0, 1)^T\}$? Jaké zobrazení konstruujeme?

Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$, tj. dostaneme vektor $[f(x)]_{B_V}$.

Cv. 12.3 Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru U do jiného vektorového prostoru V? Zobrazení $f \colon U \to V$.

Vektorové prostory zadány bází:

$$B_U = \{x_1 = (-1,0,3)^T,\ x_2 = (2,-2,2)^T,\ x_3 = (0,1,-3)^T\},$$
$$B_V = \{y_1 = (-1,1,0)^T,\ y_2 = (0,1,-1)^T,\ y_3 = (1,0,1)^T\}.$$

Jak bude vypadat matice takového zobrazení? Jaké zobrazení konstruujeme?

Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$, tj. dostaneme vektor $[f(x)]_{B_V}$.

Řešení:

Konstruujeme matici lineárního zobrazení ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ z definice.

Princip výpočtu zůstává stejný. Změna oproti předchozímu příkladu proběhne v kroku vyjádření obrazů vektorů, kde místo báze B_U vyjadřujeme vektoru vůči bázi B_V, do které zobrazení zobrazuje.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{V_1} & B_{V_2} & B_{V_3} & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ y_1 & y_2 & y_3 & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Výsledná matice ${}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Zobrazme zadaný vektor $[x]_{B_U} = (1,2,-1)^T$ lineárním zobrazením reprezentovaný maticí ${}_{B_V}[f]_{B_U}$. Řešení:

$$[f(x)]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U} = (2,-12,8)^T.$$

Cv. 12.4 Upravme zadání: Co když oproti předchozího případu, zobrazení nebude transformovat, ale jen měníme bázi (vektorový prostor)?

Maticí přechodu vypočtěte souřadnice vektoru $[x]_{B_U}$ vůči bázi B_V, tj. $[x]_{B_V}$.

Řešení:

Počítáme *matici přechodu* ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ od báze B_U vektorového prostoru U k bázi B_V vektorového prostoru V.

Mnemotechnická pomůcka výpočtu: $(B_V|B_U) \overset{RREF}{\sim} (I_n \mid {}_{B_V}[id]_{B_U}))$.

Postup obdobný předchozímu příkladu. Rozdíl je v kroku, kdy nebudeme provádět transformaci, resp. transformace je realizována identickým zobrazením. Do výpočtu matice lineárního zobrazení dle definice dosadíme takto:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{V_1} & B_{V_2} & B_{V_3} & B_{U_1} & B_{U_2} & B_{U_3} \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Výsledná matice ${}_{B_V}[id]_{B_U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Zobrazme zadaný konkrétní vektor $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ lineárním zobrazením reprezentovaný maticí ${}_{B_V}[id]_{B_U}$. Řešení:

$${}_{B_V}[id]_{B_U}\,[x]_{B_U} = [id([x]_{B_U})]_{B_V} = (1, -6, 4)^T.$$

Pro kontrolu lze vypočítat souřadnice vektoru vyjádřením vůči bázi soustavou přes lineární kombinaci.

Cv. 12.5 V předchozích příkladech, jak vypadá matice přechodu od báze B_V k bázi B_U? (výpočet z definice)

Maticí přechodu vypočtěte souřadnice vektoru $[x]_{B_V}$ vůči bázi B_U, tj. $[x]_{B_U}$.

<u>Řešení</u>:

V předchozím postupu zaměníme levou a pravou stranu matice pro výpočet vyjádření do báze.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Výsledná matice $F = {}_{B_U}[id]_{B_V} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení: ${}_{B_U}[id]_{B_V}\,[x]_{B_V} = (1, 2, -1)^T$.

Pro kontrolu lze vypočítat souřadnice vektoru vyjádřením vůči bázi.

Cv. 12.6 Jiný způsob výpočtu: Vypočtěte matici přechodu od báze B_V k bázi B_U pomocí výpočtu inverzní matice, známe-li matici přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$.

<u>Řešení</u>:

Vyžijeme teorie: Buď U a V vektorové prostory a $f\colon U \to V$ isomorfismus, pak ${}_{B_U}[f^{-1}]_{B_V} = ({}_{B_V}[f]_{B_U})^{-1}$. Předpokládejme nyní, že víme, že zobrazení ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ je isomorfismus.

$${}_{B_U}[id^{-1}]_{B_V} = ({}_{B_V}[id]_{B_U})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Čímž jsme spočítali matici přechodu dvěma způsoby: a) výpočtem z definice matice lineárního zobrazení, b) výpočet inverzního zobrazení v případě izomorfního zobrazení.

Cv. 12.7 Známe matici ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ lineárního zobrazení $f\colon U \to U$ a chceme ji vyjádřit vůči bázi B_V.

Řešení:
Způsoby řešení již známe více:

(a) Matici můžeme sestavit přímo z definice analogicky postupu sestavení matice ${}_{B_U}[f]_{B_U}$.

(b) Můžeme využít již spočítaných výsledků a skládání lineárních zobrazení: ${}_{B_V}[f]_{B_V} = {}_{B_V}[id]_{B_U} \cdot {}_{B_U}[f]_{B_U} \cdot {}_{B_U}[id]_{B_V}$.
Intuitivně: zobrazovaný vektor vůči bázi B_V se zobrazí maticí přechodu ${}_{B_U}[id]_{B_V}$ vůči bázi B_U, následně se transformuje maticí ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ a vyjádří se zpět maticí přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ vůči bázi B_V.

Cv. 12.8 Mějme matici M lineárního zobrazení. Kolik lineárních zobrazení popisuje matice M?

Řešení:
Jedná se o lehce zavádějící otázku. Odpověď záleží na podmínce, jestli máme definované báze vůči nimž zobrazení definujeme. V případě, že ano, pak matice M reprezentuje jen jedno lineární zobrazení a toto lineární zobrazení je reprezentováno právě jednou maticí, jedná se o důsledek věty o jednoznačnosti matice lineárního zobrazení. Pokud však není uvedeno, vůči jaké bázi se zobrazení vyjadřuje, pak ke každé bázi existuje jedno lineární zobrazení.

Cv. 12.9 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ dané maticí

$$F = {}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

kde

$$B_U = \{(-1,0,3)^T,\ (2,-2,2)^T,\ (0,1,-3)^T\},$$
$$B_V = \{-x^2 + x,\ x-1,\ x^2+1\}.$$

Určete, zda je zobrazení:

(a) prosté

(b) na

Řešení:

(a) Protože $\operatorname{rank}(F) = 2$ a pro každé lineární zobrazení $f\colon U \to V$ je $\dim(U) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(f(U))$, tudíž $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 3 - \operatorname{rank}(F) = 1$. Z netriviálnosti jádra zobrazení plyne, že zobrazení f není prosté. Alternativně, zobrazení dané maticí F není prosté, protože F nemá lineárně nezávislé sloupce.

(b) Víme, že platí $\dim(f(U)) = \dim(\mathcal{S}(F)) = \operatorname{rank}(F)$, kde $\dim(f(U))$ určuje dimenzí obrazu zobrazení f. Z hodnoty dimenze vektorového prostoru $\mathcal{P}^2$, které má dimenzi $\dim(\mathcal{P}^2) = 3$, platí $\dim(f(U)) < \dim(\mathcal{P}^2)$. Proto není zobrazení „na“. Alternativně, zobrazení dané maticí F není „na“ protože, dle F nemá lineárně nezávislé řádky.

Cv. 12.10 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definované maticí

$$A = {}_{\text{kan}}[f]_B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte dva různé (nenulové) vektory $x, y \in \mathbb{R}^3$ takové že:

(a) $f(x) = f(y) = (-1, -1, 1)^T$,

(b) $f(x) = f(y)$.

Řešení:

(a) V řeči lineárních zobrazení hledáme vektor x, který se zobrazí zobrazením f na zadaný vektor $b = f(x)$ V řeči:

i. lineárních zobrazení $x \xrightarrow{\text{f}} f(x)$

ii. matic lineárních zobrazení $x \xrightarrow{\text{A}} b$

iii. maticových reprezentací soustav lineárních rovnic $Ax = b$; přičemž, lze-li soustavu lineárních rovnic vyřešit, platí $b \in \mathcal{S}(A)$, tedy b je lineární kombinací sloupcových vektorů matice A, kde řešení x udává „naškálování“ těchto vektorů.

Sestavíme a vyřešíme soustavu lineárních rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Z řešení vidíme, že matice má netriviální kernel a tedy nekonečno řešení. Určíme si dvě konkrétní řešení např. $x = (1, -1, 0)^T$, $y = (0, -2, -1)^T$. Můžeme provést kontrolu zobrazením vektorů. Tyto vektory jsou souřadnice vektorů vůči bázi B.

(b) V tomto případě nemáme zadaný vektor $f(x) = f(y)$, ke kterému hledáme vzor. Co s tím? Přibyl nám jeden volný parametr. Dílčím řešením úlohy je, jeden vektor $f(x)$ zvolit. Víme ale pak, že $f(x) \in \mathcal{S}(A)$, resp. že má soustava řešení? Zvolme tedy $f(x)$ takové, že $f(x) \in \mathcal{S}(A)$. Zvolíme si náhodný vektor (výběru sloupců matice A – sloupcová interpretace řešení soustav lineárních rovnic), např. $x = (1, -1, 0)^T$ (zvolena byla taková čísla, aby se s nimi dobře počítalo), a vypočteme jeho obraz $f(x) = Ax$. (Což je způsob, jak byl zkonstruován tento příklad.) Přičemž situaci převádíme na předchozí případ.

13. Obraz, jádro, isomorfismus

Cv. 13.1 Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z,\ y - z,\ x - y)^T$$

je isomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (takzvaným automorfismem).

Řešení:
Isomorfismus dvou vektorových prostorů je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení (tedy lineární zobrazení, které je bijekce). Budeme chtít zjistit dimenzi jádra (pokud je zobrazení prosté, tak má být nulová) a dimenzi obrazu = dimenzi sloupcového prostoru (pokud má být zobrazení „na", tak musí být stejná jako dimenze prostoru, do kterého to zobrazení jde).

Sestavíme matici zobrazení vůči kanonické bázi (jakákoliv báze by posloužila stejně):

$${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abychom určili rank této matice, provedeme Gaussovu eliminaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že dimenze jádra matice je rovna jedné, takže zobrazení není prosté. To můžeme i snadno ověřit: $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)^T = f(1, 1, 1)$.

Obdobně dimenze sloupcového prostoru je rovná dvěma (vzpomeňte na větu, že dimenze sloupcového a řádkového prostoru se rovnají). Tedy funkce není „na". Opět bychom mohli ověřit, že například vektor $(0, 0, 1)^T$ není v obraze (stejná Gaussova eliminace doplněná o pravou stranu).

Cv. 13.2 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadané obrazem báze B:

$$f(2, 1, 1) = (1, 2, 3)^T,$$
$$f(1, 3, 5) = (3, 2, 1)^T,$$
$$f(7, 1, 4) = (1, 1, 1)^T.$$

Zjistěte, jestli je zobrazení prosté (pokud není, najděte vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ takové, že $u \neq v \wedge f(u) = f(v)$) a jestli je „na" (pokud ne, najděte vektor, který nemá předobraz, tedy $u \in \mathbb{R}^3$ takové že $\forall v \in \mathbb{R}^3\colon f(v) \neq u$). Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra tohoto lineárního zobrazení.

Řešení:
Prostota: Napřed určíme, jestli je zobrazení prosté (injektivní). Pokud by nebylo, pak by nutně existovaly dva různé vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ (z definičního oboru)

takové, že $f(u) = f(v)$. Upravme si tuto situaci:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(v), \\ {}_A[f]_B \cdot [u]_B &= {}_A[f]_B \cdot [v]_B, \\ {}_A[f]_B \cdot [u]_B - {}_A[f]_B \cdot [v]_B &= o, \\ {}_A[f]_B \cdot ([u]_B - [v]_B) &= o, \end{aligned}$$

kde ${}_A[f]_B$ značí matici lineárního zobrazení a $[u]_B, [v]_B$ značí vektory souřadnic vektorů u, v vůči bázi B, tedy $[f(u)]_A = {}_A[f]_B \cdot [u]_B$. V našem případě je báze A kanonická báze. Tedy pokud je zobrazení prosté, pak jeho matice má ve svém jádře jediný vektor o.

Sestrojíme tedy matici (bude brát vektory souřadnic v bázi B a vracet vektory souřadnic v kanonické bázi):

$${}_{\mathrm{kan}}[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Gaussovy eliminace najdeme její jádro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že jádro má dimenzi jedna a všechna řešení této homogenní soustavy mají tvar: $\left\{(-\frac{1}{4}t, -\frac{1}{4}t, t)^T \mid t \in \mathbb{R}\right\}$. Můžeme volit vektor $[u]_B = (1, 1, -4)^T$, tedy

$$u = 1 \cdot (2, 1, 1)^T + 1 \cdot (1, 3, 5)^T - 4 \cdot (7, 1, 4)^T = (-25, 0, -10)^T,$$

který se zobrazí na nulu (stejně jako nulový vektor)

$$f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)^T = f(-25, 0, -10).$$

Všimněte si, že souřadnice vektoru z jádra matice byly vůči bázi B, my chtěli souřadnice vektoru u v kanonické bázi, museli jsme tedy ještě řešit převod mezi souřadnicemi.

Dimenze jádra: Vzhledem k tomu, že jádro lineárního zobrazení má dimenzi jedna, tak jeho bázi může tvořit například vektor $u = (-25, 0, -10)^T$ (vzpomeňte, jak jsme na něj přišli – platí, že $[(-25, 0, -10)^T]_B = (1, 1, -4)$).

Obraz a surjektivita (jestli je "na"): Každý vektor z obrazu je lineární kombinací sloupcových vektorů. Speciálně existuje vektor $a \in \mathbb{R}^3$ takový, že $f(a) = (1, 2, 3)^T$ (psáno v kanonické bázi), to byl náš zadaný vektor $(2, 1, 1)^T$, který měl v bázi B souřadnice $[(2, 1, 1)^T]_B = (1, 0, 0)^T$.

Z minulé Gaussovy eliminace vidíme, že dimenze obrazu (což je dimenze sloupcového prostoru, což dle věty z přednášky je rovné dimenzi řádkového prostoru) je rovná dvěma a její báze jsou například první dva vektory: $(1, 2, 3)^T$, $(3, 2, 1)^T$ (obraz je pak lineární obal těchto dvou vektorů). Dimenze obrazu je tedy dva a zobrazení f není „na“ (surjektivní).

Vektor mimo obraz: Doplněním těchto dvou vektorů na bázi $\mathbb{R}^3$ získáme vektor, který nemá předobraz ve zobrazení f. Například to může být vektor $(0, 0, 1)^T$ (pokud bychom nedoplňovali z kanonické báze, ale z jiné, mohl nám vyjít jiný vektor).

Cv. 13.3 Nechť $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ jsou isomorfismy vektorových prostorů. Dokažte, že $g \circ f\colon U \to W$ je také isomorfismus vektorových prostorů (tedy že isomorfismus je ekvivalence). Speciálně ukažte, že:

(a) Jsou-li f, g prostá, pak $g \circ f$ je prosté.

(b) Jsou-li f, g „na“, pak $g \circ f$ je „na“.

Řešení:

(a) Jsou-li f, g prostá, pak $g \circ f$ je prosté: Víme, že:

$$\forall u_1, u_2 \in U\ :\ u_1 \neq u_2 \ \Rightarrow\ f(u_1) \neq f(u_2),$$
$$\forall v_1, v_2 \in V\ :\ v_1 \neq v_2 \ \Rightarrow\ g(v_1) \neq g(v_2).$$

Chceme:

$$\forall u_1, u_2 \in U\ :\ u_1 \neq u_2 \ \Rightarrow\ g(f(u_1)) \neq g(f(u_2)).$$

Vezmeme-li libovolná různá $u_1, u_2 \in U\colon u_1 \neq u_2$, pak $f(u_1) \neq f(u_2)$ jsou různá (f je prostá). Z toho, že g je prostá a $f(u_1), f(u_2) \in U\colon f(u_1) \neq f(u_2)$ máme $g(f(u_1)) \neq g(f(u_2))$.

(b) Jsou-li f, g „na“, pak $f \circ g$ je „na“: Jen nápověda: pro libovolné $w \in W$ napřed najdeme jeho předobraz v g, pak předobraz předobrazu v f.

Cv. 13.4 Rozhodněte, jestli jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní:

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$,

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři),

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$,

(e) $\mathbb{R}^2$ a $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$,

(f) prostor všech reálných polynomů a prostor všech reálných posloupností,

(g) $\mathbb{R}^4$ a lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Řešení:

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$.
Ano, ověřte zobrazení

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři).
Ano, reálný polynom stupně nejvýš tři můžeme reprezentovat jeho koeficienty (čtyři reálná čísla taková, že $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$). Každá čtveřice čísel nám dá jeden polynom a každý polynom nám dá jednu čtveřici čísel.

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$.
Ano, isomorfismem bude transpozice (to je asi ten nejpřirozenější isomorfismus mezi těmito prostory).

(d) $\mathbb{R}^2$ a $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$.
Ano, můžeme volit například zobrazení

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ -a \\ b \\ -b \end{pmatrix}$$

(e) Prostor všech reálných polynomů a prostor všech reálných posloupností.
Ne, intuitivně protože nemáme polynomy nekonečného stupně, ale máme například posloupnost $a_n = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

(f) $\mathbb{R}^4$ a lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.
Ano, vektoru $u \in \mathbb{R}^4$ přiřadíme lineární zobrazení $f(v) = u^T v$. Naopak každé lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ se dá zapsat maticí s jedním řádkem a čtyřmi sloupci (věta z přednášky).

Cv. 13.5 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dané předpisem $A \mapsto (A - A^T)$ rozhodněte které vektory patří do jádra a které do obrazu:

(a) I_2,

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) I_2.
Patří do jádra, neboť $I_2 - I_2^T = 0$ (nulová matice). Nepatří do obrazu, neboť každá matice v obrazu má nulovou diagonálu (na diagonále se prvky odečtou).

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Patří do jádra i do obrazu (je obrazem sama sebe).

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Patří do jádra, ale nepatří do obrazu.

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Nepatří do jádra, ale je obrazem (mimo jiných, protože diagonálu můžeme volit libovolně) matice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 13.6 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. Ukažte, že $\mathrm{Ker}(f^n) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{n+1})$.

Řešení:

Napřed si zobrazení f vyjádříme maticí, tedy existuje $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že $A = {}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}}$ (používáme A, protože toto značení je kratší). Tedy $\forall v \in \mathbb{R}^n\colon f(v) = Av$. Navíc ale máme $\forall v \in \mathbb{R}^n\colon f^n(v) = A^n v$.

Pokud $v \in \mathrm{Ker}(f^n)$, pak $f^n(v) = o$, tedy $A^n v = o$. Pak ale jistě

$$A^{n+1}v = A(A^n v) = Ao = o.$$

Tedy $v \in \mathrm{Ker}(f^n) \Rightarrow v \in \mathrm{Ker}(f^{n+1})$, tudíž $\mathrm{Ker}(f^n) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{n+1})$.

Cv. 13.7 Rozhodněte, zda lineární zobrazení je prosté a zda je „na“:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c,\ a+b,\ a)^T$,

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c+d, a+b+c,\ a+b,\ a)^T$,

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+c,\ a+b)^T$,

(d) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+c)^T$,

(e) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+2c)^T$.

Řešení:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c,\ a+b,\ a)^T$.
Je „na“, ale není prosté.

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c+d,\ a+b+c,\ a+b,\ a)^T$.
Je „na“ a je prosté.

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+c,\ a+b)^T$.
Není na (první a poslední souřadnice výsledku jsou vždy stejné), ani prosté ($f(x^2-x-2) = (0,0,0,0)^T$).

Cv. 13.8 Ukažte, že pro (každé dvě) matice $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ platí

$$\dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(B)) = \mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}(AB).$$

Řešení:

Nechť dimenze prostoru $\mathrm{Ker}(A)\cap\mathcal{S}(A)$ a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ je jeho báze, doplňme ji na bázi celého $\mathcal{S}(A)$ pomocí vektorů $w_1, w_2, \ldots, w_\ell$. Pak $\mathrm{rank}(B) = \dim(\mathcal{S}(B)) = k+\ell$. Chceme ukázat, že $\mathrm{rank}(AB) = \dim(\mathcal{S}(AB)) = \ell$. Uvědomme si, že obraz AB můžeme zkoumat zkoumáním toho, kam A zobrazí bázi $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_\ell$. Bázi $v_1, \ldots, v_k$ zobrazí na nulový vektor. Pokud by vektory $Aw_1, Aw_2, \ldots, Aw_\ell$ byly lineárně závislé:

$$\alpha_1 Aw_1 + \alpha_2 Aw_2 + \ldots + \alpha_\ell Aw_\ell = o, \qquad \text{(alfy netriviální)}$$
$$A\,(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_\ell w_\ell) = o.$$

Ale druhý řádek je spor, neboť z volby vektorů $w_1, \ldots, w_\ell$ víme, že žádná netriviální kombinace vektorů w_j není v jádře matice A.

14. Afinní podprostory

Cv. 14.1 Ukažte, že množina řešení (řešitelné) soustavy $Ax = b$ je afinní množina a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Řešení:
Označme jako $X = \{x^* \in \mathbb{R}^n;\, Ax^* = b\}$ množinu řešení soustavy $Ax = b$. Pro $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ (tedy $x_i : Ax_i = b$) má platit, že jejich libovolná afinní kombinace opět náleží do X, totiž

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = b, \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Úpravou, kdy vytkneme jednotlivá α_i dostáváme z výrazu na levé straně

$$\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 + \ldots + \alpha_n A x_n = \alpha_1 b + \alpha_2 b + \ldots + \alpha_n b.$$

Vytkneme zprava vektor b a ze vztahu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ dostáváme

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) b = b.$$

Proto libovolná afinní kombinace řešení soustavy $Ax = b$ je opět jejím řešením.

Cv. 14.2 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1,2,3)^T,\ x_1 = (2,3,1)^T,\ x_2 = (1,3,2)^T,\ x_3 = (2,1,3)^T$$

jsou afinně nezávislé.

Řešení:
Spočítáme vektory

$$x_1 - x_0 = (1,1,-2)^T, \quad x_2 - x_0 = (0,1,-1)^T, \quad x_3 - x_0 = (1,-1,0)^T.$$

Tyto tři vektory jsou lineárně závislé (generují dvou-dimenzionální podprostor), proto jsou původní vektory afinně závislé.

Cv. 14.3 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1,0,2)^T,\ x_1 = (2,2,1)^T,\ x_2 = (2,1,3)^T,\ x_3 = (3,3,2)^T$$

leží v jedné rovině.

Řešení:
Zadané vektory x_0, x_1, x_2, x_3 leží v jedné rovině právě tehdy, když dimenze afinního podprostory $\operatorname{span}\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0\}$ je rovna 2. Nejprve spočítáme $x_1 - x_0 = (1,2,-1)^T$, $x_2 - x_0 = (1,1,1)^T$, $x_3 - x_0 = (2,3,0)^T$ a následně dimenzi jejich lineárního obalu pomocí hodnosti následující matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že hodnost matice je 2, tedy vektory $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$, $x_3 - x_0$ leží v rovině procházející počátkem a proto x_0, x_1, x_2, x_3 leží v rovině.

Cv. 14.4 Rozhodněte, zda $M = N$ pro

(a) $M = \mathrm{span}\{(1,2)^T\} + (1,-1)^T$,
$N = \mathrm{span}\{(2,4)^T\} + (2,3)^T$,

(b) $M = \mathrm{span}\{(1,2,1)^T, (2,1,0)^T\} + (1,0,0)^T$,
$N = \mathrm{span}\{(0,3,2)^T, (3,0,-1)^T\} + (2,-1,-1)^T$.

Řešení:

(a) Vidíme, že jak M, tak N jsou přímky (afinní podprostory dimenze 1). Jejich rovnost nastane právě tehdy, když libovolný bod z M leží v N a naopak. Například $(1,-1)^T \in M$ se musí dát vyjádřit jako afinní kombinace bodů z N, tedy jako $(1,-1)^T = \alpha(2,4)^T + (2,3)^T$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. To nám dává soustavu dvou rovnic o 1 neznámé

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2 &= 1, \\ 4\alpha + 3 &= -1, \end{aligned}$$

která nemá řešení. Proto $(1,-1)^T \notin M$ a tedy $M \neq N$. Dokonce ani žádný vztah z $M \not\subseteq N$, $N \not\subseteq M$ není možný. Ve skutečnosti přímky M, N jsou rovnoběžné.

(b) Opět musí platit, že libovolný vektor $a(1,2,1)^T + b(2,1,0)^T + (1,0,0)^T \in P$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ náleží do Q, tedy se dá vyjádřit jako $c(0,3,2)^T + d(3,0,-1)^T + (2,-1,-1)^T$ (pro $c, d \in \mathbb{R}$) a naopak. Musí proto platit mezi oběma výrazy rovnost

$$a(1,2,1)^T + b(2,1,0)^T + (1,0,0)^T = c(0,3,2)^T + d(3,0,-1)^T + (2,-1,-1)^T,$$

která se dá zapsat soustavou tří rovnic jako

$$\begin{aligned} a + 2b + 1 &= 3d + 2, \\ 2a + b &= 3c - 1, \\ a &= 2c - d - 1. \end{aligned}$$

Pokud budeme schopni c, d vyjádřit v závislosti na a, b, znamená to, že pro libovolný vektor z M daný souřadnicemi a, b jsme schopni nalézt odpovídající souřadnice c, d toho samého vektoru v N. Tedy ukážeme, že $M \subseteq N$. Podobně, pokud vyjádříme a, b v závislosti na c, d, dostaneme $N \subseteq M$ a v důsledku $M = N$.

Pojďme nejprve vyjádřit a, b v závislosti na $c, d \in \mathbb{R}$. Tím soustavu interpretujeme jako parametrickou soustavu, kde $c, d \in \mathbb{R}$ jsou parametry a a, b jsou neznámé. Rovnicově

$$\begin{aligned} a + 2b &= 3d + 1, \\ 2a + b &= 3c - 1, \\ a &= 2c - d - 1, \quad c, d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a maticově

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3d+1 \\ 2 & 1 & 3c-1 \\ 1 & 0 & 2c-d-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 2 & 1 & 3c-1 \\ 1 & 2 & 3d+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 0 & 1 & -c+2d+1 \\ 0 & 2 & -2c+4d+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 0 & 1 & -c+2d+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Řešení soustavy je $a = 2c - d - 1$ a $b = -c + 2d + 1$.

Podobně pro $a, b \in \mathbb{R}$ parametry a c, d neznámé interpretujeme soustavu rovnicově

$$\begin{aligned} 3d &= a + 2b - 1, \\ 3c &= 2a + b + 1, \\ 2c - d &= a + 1, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a maticově

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & a+2b-1 \\ 3 & 0 & 2a+b+1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 2a+b+1 \\ 0 & 3 & a+2b-1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2a+b+1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+2b-1}{3} \\ 2 & -1 & \frac{3a+3}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2a+b+1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+2b-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3a+3}{3} - 2\frac{2a+b+1}{3} + \frac{a+2b-1}{3} \end{array}\right).$$

Platí, že $\frac{3a+3}{3} - 2\frac{2a+b+1}{3} + \frac{a+2b-1}{3} = 0$, tedy soustava má řešení $c = \frac{2a+b+1}{3}$ a $d = \frac{a+2b-1}{3}$. Tudíž $M \subseteq N$ a v důsledku $M = N$.

Cv. 14.5 Uvažujme dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p : y = 10$ a g představuje překloplení podle přímky $q : x = 2$.

(a) Najděte maticový předpis zobrazení f,

(b) najděte maticový předpis zobrazení g,

(c) z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení $f \circ g$.

Řešení:

(a) Zobrazení $f(x)$ můžeme zkonstruovat pomocí složení trojice jednodušších afinních zobrazení f_1, f_2, f_3 tak, že nejprve posuneme vektor x o $(0, -5)^T$, provedeme překlopení podél osy x a následně posuneme daný vektor zpět o $(0, 5)^T$. Tato zobrazení můžeme vyjádřit jako

- $f_1(x) = x + (0, -5)^T$,
- $f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = O_1 x$,
- $f_3(x) = x + (0, 5)^T$.

Dostáváme $f(x) = f_3(f_2(f_1(x))) = f_3(f_2(x + (0, -5)^T)) = f_3(O_1(x + (0, -5)^T)) = O_1(x + (0, -5)^T) + (0, 5)^T = O_1 x + (0, 5)^T + (0, 5)^T = O_1 x + (0, 10)^T$.

(b) Zobrazení $g(x)$ můžeme zkonstruovat podobně jako složení g_1, g_2, g_3, kde

- $g_1(x) = x + (-2, 0)^T$ (posunutí o $(-2, 0)^T$),
- $g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = O_2 x$ (rotace podél osy y),

- $g_3(x) = x + (2,0)^T$ (posunutí nazpět o $(2,0)^T$).

  Složením dostáváme $g(x) = g_3(g_2(g_1(x))) = O_2x + (4,0)^T$.

(c) Složení $f \circ g = f(g(x)) = f(O_2x + (4,0)^T) = O_1(O_2x + (4,0)^T) + (0,10)^T = O_1O_2x + O_1(4,0)^T + (0,10)^T = O_1O_2x + (4,0)^T + (0,10)^T = O_1O_2x + (4,10)^T$, po rozepsání maticového součinu

$$(f \circ g)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Cv. 14.6 Dokažte, že vektory $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory $y_0 = (x_0^T, 1)^T$, $y_1 = (x_1^T, 1)^T, \ldots, y_n = (x_n^T, 1)^T$ jsou lineárně nezávislé.

Řešení:

Důležité je zde uvědomit si, co za dodatečnou informaci nám dává struktura vektorů $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Z jejich struktury vyplývá, že $\sum_{i=0}^n \alpha_i y_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i = 0$ a zároveň $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 0$. Jedná se totiž pouze o rozdělení vektorové rovnice na 2 části, kde v první uvažujeme prvních n složek vektorů y_i a v druhé poslední $(n+1)$. složku. Schematicky,

$$\alpha_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0_n,$$

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 1 + \ldots + \alpha_n \cdot 1 = 0.$$

Důkaz tvrzení rozdělíme na 2 implikace.

- „Lineární závislost $y_0, y_1, \ldots, y_n$ implikuje afinní závislost $x_0, x_1, \ldots, x_n$."

  Pokud jsou $y_0, y_1, \ldots, y_n$ lineárně závislé, pak platí

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i y_i = 0$$

  a zároveň existuje $j : \alpha_j \neq 0$. Můžeme proto vyjádřit y_j pomocí ostatních vektorů jako

$$y_j = \sum_{i \neq j} \beta_i y_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j} y_i.$$

  Speciálně (omezíme-li se na prvních n složek) také

$$x_j = \sum_{i \neq j} \beta_i x_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j} x_i.$$

  a (omezíme-li se na poslední složky y_i)

$$1 = \sum_{i \neq j} \beta_i x_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j}.$$

  Vidíme, že x_j se dá vyjádřit jako afinní kombinace zbylých vektorů s koeficienty β_i. Vektory $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou tedy afinně závislé.

- „Afinní závislost $x_0, x_1, \ldots, x_n$ implikuje lineární závislost $y_0, y_1, \ldots, y_n$."
  Jsou-li $x_0, x_1, \ldots, x_n$ afinně závislé, pak existuje j takové, že

$$x_j = \sum_{i \neq j} \beta_i x_i \quad \text{a zároveň} \quad \sum_{i \neq j} \beta_i = 1.$$

  Sloučením obou rovnic dostáváme

$$\begin{pmatrix} x_j \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i \neq j} \beta_i \begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix},$$

  což je ekvivalentní

$$y_j = \sum_{i \neq j} \beta_i y_i.$$

  Množina $y_0, y_1, \ldots, y_n$ je tudíž lineárně závislá.