Lineární algebra pro pokročilé

Martin Černý, Hanka Salavcová

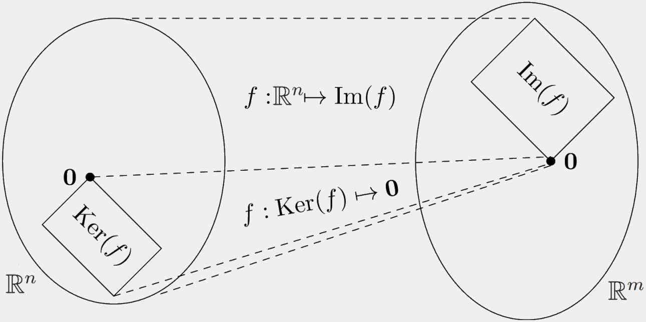
kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

December 12, 2023

Fundamentální podprostory a hodnost matice

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ... lineární zobrazení

- $Ker(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\}$ ... ***jádro*** zobrazení f
- $Im(f) = \{f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ ... ***obraz*** zobrazení f



Cíl: *Pochopit chování zobrazení za pomoci jádra a obrazu.*

- $Ker(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, $Im(f) \subseteq \mathbb{R}^m$

Otázka: Jsou to vektorové podprostory?

Jádro a obraz jsou podprostory.

Množiny $Ker(f)$ a $Im(f)$ tvoří vektorové podprostory.

Důkaz:

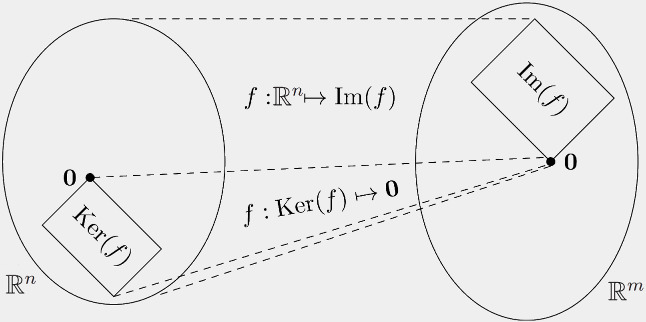
1. $Ker(f) = Ker(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$ ... již víme
2. $Im(f) = \{f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$
   - $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Im(f) \implies \mathbf{a} + \mathbf{b} \in Im(f)$ ... uzavřenost
     - $\mathbf{a} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{b} = f(\mathbf{y})$
     - $\mathbf{a} + \mathbf{b} = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$

Lineární zobrazení zachovává podprostory

Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a vektorové podprostory $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ platí, že $f(X)$ a $f^{-1}(Y)$ jsou také vektorové podprostory.

Důkaz:

1. $f(X)$ ... již *dokázáno*
   - $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in f(X) \implies \mathbf{a} + \mathbf{b} \in f(X)$ ... uzavřenost
     - $\mathbf{a} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{b} = f(\mathbf{y})$
     - $\mathbf{a} + \mathbf{b} = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$
2. $f^{-1}(Y) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \text{ pro } \mathbf{y} \in Y\}$ ... vzor Y
   - $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f^{-1}(Y)$
   - $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$, $f(\mathbf{y}) = \mathbf{b}$
     - $\exists \mathbf{a}, \mathbf{b} \in Y$
   - $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$
     - $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in Y \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in f^{-1}(Y)$



Intuitivně: *Čím větší $Ker(f)$, tím menší $Im(f)$*

Vztah mezi $Ker(f)$ a $Im(f)$

Pro libovolné lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ platí

$$\dim Im(f) = \dim \mathbb{R}^n - \dim Ker(f).$$

Vztah mezi $Ker(f)$ a $Im(f)$

Pro libovolné lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ platí

$$\dim Im(f) = \dim \mathbb{R}^n - \dim Ker(f).$$

Důkaz:

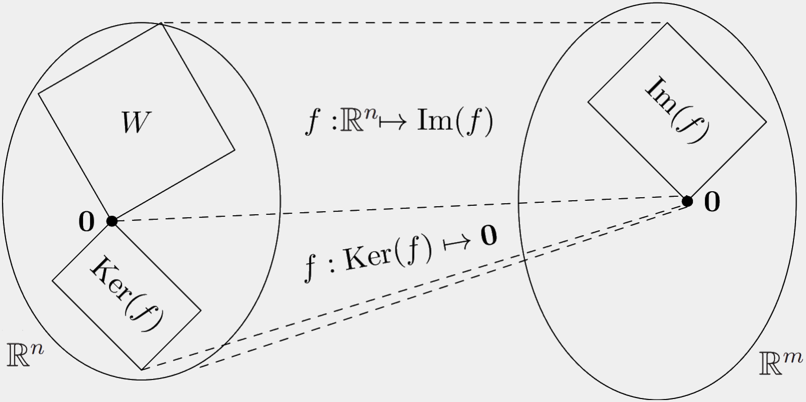
- $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ ... báze $Ker(f)$
- $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ ... báze $\mathbb{R}^n$
- $W = \mathcal{L}(\mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n)$

1. $f(W) = Im(f)$
   - $\mathbf{y} \in Im(f) \implies \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$
   - $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{x}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n$
   - $f(\mathbf{x}) = f(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{x}_k) + f(\alpha_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n)$
   - $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_W)$, $\mathbf{x}_W \in W$
2. $f(W)$ ... prosté zobrazení W
   - $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ ... $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$
   - $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{o}$
   - $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in Ker(f) \cap W \implies \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{o} \implies \mathbf{x} = \mathbf{y}$

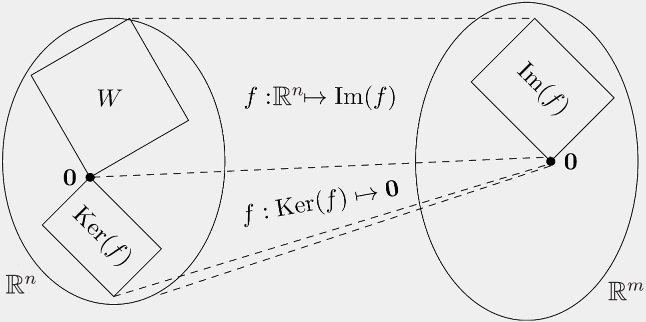
Vztah mezi $Ker(f)$ a $Im(f)$

Pro libovolné lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ platí

$$\dim Im(f) = \dim \mathbb{R}^n - \dim Ker(f).$$



VZTAH MEZI $Ker(f)$ A $Im(f)$



- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_K + \mathbf{x}_W \in \mathbb{R}^n$
  - $\mathbf{x}_K \in Ker(f)$, $\mathbf{x}_W \in W$
- $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_K) + f(\mathbf{x}_W) = f(\mathbf{x}_W)$
- $\mathbf{x}_K$ ... informace ztracena při f
- $\mathbf{x}_W$ ... veškeré informace o $f(\mathbf{x})$

Minule:

- $f \sim A$ ... maticová reprezentace zobrazení
- $f^{-1} \sim A^{-1}$ ... maticová reprezentace inverze

Inverzní zobrazení

Lineární zobrazení $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ má inverzi, právě tehdy, když je jeho maticová reprezentace A **regulární**.

Důkaz: Využití LU dekompozice a **transpozice** matice

Otázka: *Jakému zobrazení odpovídá A^T?*

Duální zobrazení

Mějme lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a jeho maticovou reprezentaci A vůči bázím X a Y. ***Duální zobrazení*** $f^*: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení reprezentované A^T vůči *duálním bázím* Y^* a X^*.

Otázka:

1. Co nám může zobrazení f^* říct o zobrazení f?
   - vztah $Ker(f), Im(f)$ s podprostory $Ker(f^*)$, $Im(f^*)$
   - resp. $Ker(A), Im(A)$ s podprostory $Ker(A^T)$, $Im(A^T)$

Fundamentální podprostory

Pro lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a jeho maticovou reprezentaci A definujeme:

- $Ker(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$ ... ***jádro,***
- $Im(A) = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ ... ***obraz,***
- $\mathcal{R}(A) = Im(A^T)$ ... ***řádkový prostor,***
- $Ker(A^T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid A^T\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$ ... ***levé jádro.***

Alternativně:

- $Im(A)$ ... lineární obal sloupcových vektorů
  - $Im(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$
- $\mathcal{R}(A)$ ... lineární obal řádkových vektorů
- $Ker(A^T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x}^T A = \mathbf{o}\}$

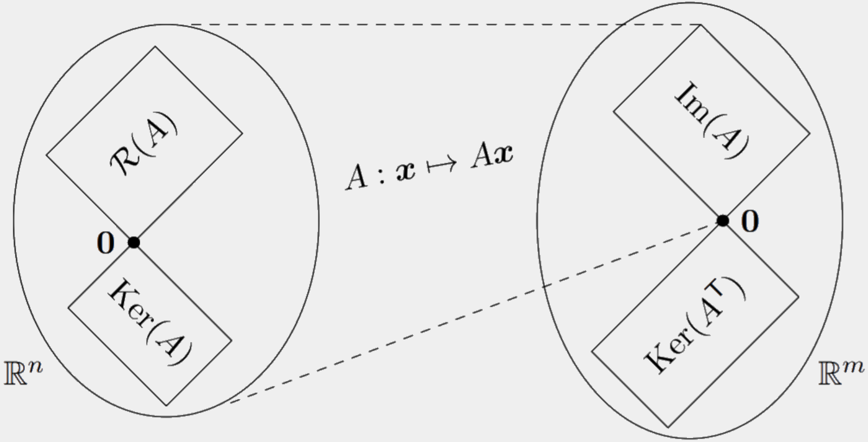
- Jaký je vztah mezi $Ker(A)$ a $Im(A^T)$?

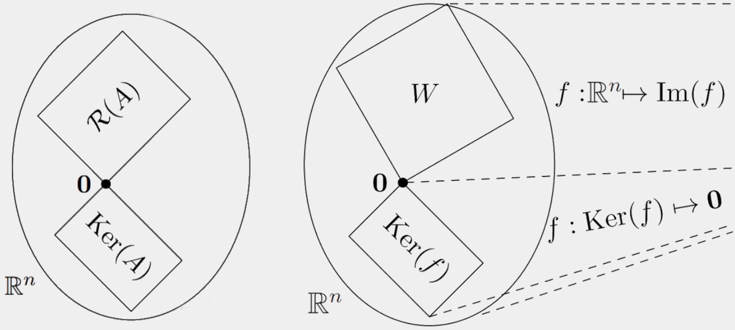
Vztah kernelu a obrazu duálu

Pro libovolnou matici A platí $Ker(A) \cap Im(A^T) = \{\mathbf{o}\}$.

Důkaz:

- $\mathbf{x} \in Ker(A)$: $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$
- $\mathbf{x} \in Im(A^T)$: $\exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : A^T\mathbf{y} = \mathbf{x}$
- $AA^T\mathbf{y} = \mathbf{o}$
- $\mathbf{y}^T AA^T \mathbf{y} = 0$ ... symetrizace problému
- $\mathbf{y}^T AA^T \mathbf{y} = (A^T\mathbf{y})^T A^T \mathbf{y} = \mathbf{z}^T\mathbf{z} = 0$
- $\mathbf{z}^T\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n z_i^2 = 0 \implies z_i = 0 \implies A^T\mathbf{y} = \mathbf{o}$
- $\implies \mathbf{x} = \mathbf{o}$


$\mathcal{R}(A)$
$\mathbf{0}$
$\mathrm{Ker}(A)$
$\mathbb{R}^n$
$A : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$
$\mathrm{Im}(A)$
$\mathbf{0}$
$\mathrm{Ker}(A^\top)$
$\mathbb{R}^m$



Otázka: Není $\mathcal{R}(A)$ jeden z podprostorů W?

- $f(W) = Im(f)$
  - $f \restriction W$ ... prosté
- $\dim W = \dim Im(f)$

O dimenzi řádkového a sloupcového protoru

Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí

$$\dim Im(A) = \dim Im(A^T).$$

Důkaz: Využítí LU dekompozice

1. Důkaz pro trojúhelníkovou matici U
2. pomocí $PA = LU$ pro obecnou A

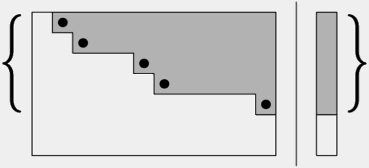
O dimenzi řádkového a sloupcového protoru

Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí

$$\dim Im(A) = \dim Im(A^T).$$

Důkaz: $\dim Im(U) = \dim Im(U^T)$ $\quad$ U ... odstupňovaná tvar A

$\dim \mathcal{R}(U) = r$



$r = \dim \mathrm{Im}(U)$

- $\mathbf{b} \in Im(U) \implies \exists \mathbf{x} : U\mathbf{x} = \mathbf{b}$
  - $\implies b_{r+1} = b_{r+2} = \ldots = b_m = 0$
  - $\implies \dim Im(U) = r$
- $\dim Im(U^T) = \dim \mathcal{R}(U)$
  - r řádků obsahuje pivot $\implies$ lineárně nezávislé
  - $\implies \dim Im(U^T) = r$

O dimenzi řádkového a sloupcového protoru

Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí

$$\dim Im(A) = \dim Im(A^T).$$

Důkaz: Využití LU dekompozice $PA = LU$

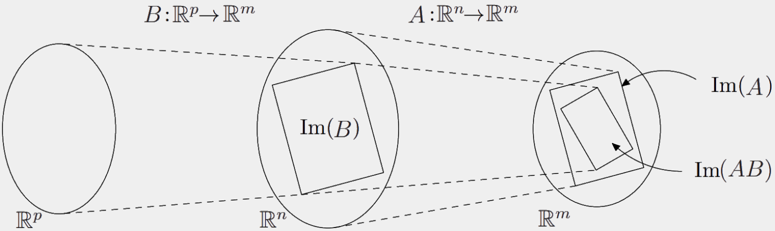
- máme: $\dim Im(U) = \dim Im(U^T)$
- chceme: $\dim Im(A) = \dim Im(A^T)$
- zkusme:
  - $\dim Im(A) = \dim Im(U)$
  - $\dim Im(A^T) = \dim Im(U^T)$

O dimenzi řádkového a sloupcového protoru

Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí
$$\dim Im(A) = \dim Im(A^T).$$

Důkaz: Využití LU dekompozice $PA = LU$

- $A = P^T LU$
  - $P^T L$ ... regulární úpravy
- *Jak se liší* $\dim Im(U)$ *a* $\dim Im(P^T LU)$*?*



  - $\dim Im(U) \geq \dim Im(P^T LU)$
  - $\dim Im(P^T LU) \geq \dim Im((P^T L)^{-1} P^T LU) = \dim Im(U)$

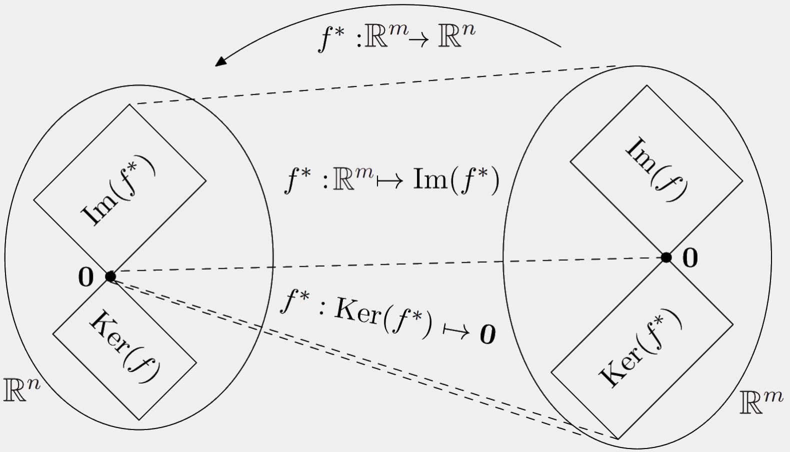
O dimenzi řádkového a sloupcového protoru

Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí
$$\dim Im(A) = \dim Im(A^T).$$

Důkaz: Využití LU dekompozice $PA = LU$

- máme: $\dim Im(U) = \dim Im(U^T)$
- $\dim Im(A) = \dim Im(U)$
  - $A = P^T LU$
  - $\dim(U) \geq Im(A)$
  - $\dim Im(A) = \dim Im(P^T LU) \geq \dim Im((P^T L)^{-1} P^T LU) = \dim Im(U)$
- $\dim Im(A^T) = \dim Im(U^T)$
  - $A^T = PL^T U^T$
  - $\dim(U^T) \geq Im(A^T)$
  - $\dim Im(A^T) = \dim Im(PL^T U^T) \geq \dim Im((PL^T)^{-1} PL^T U^T) = \dim Im(U^T)$

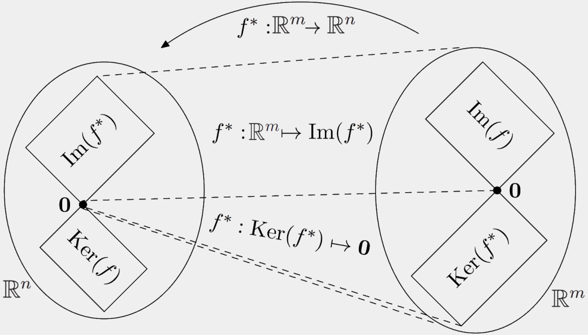
Vztah fundamentálních podprostorů



Vztah mezi jádrem a obrazem

Pro libovolné lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a jeho duální zobrazení $f^*: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ platí:

1. $\dim Im(f) + \dim Ker(f) = \dim \mathbb{R}^n$,
2. $Ker(f) \cap Im(f^*) = \{\mathbf{o}\}$,
3. $\dim Im(f) = \dim Im(f^*)$.



Hodnost matice

Hodnost matice A je dimenze obrazu zobrazení, značíme $rank(A) := \dim(Im(A))$.

- zachycuje jak moc zobrazení A *zužuje* prostor $\mathbb{R}^n$
- $rank(A) = rank(A^T)$
- zachycuje *míru regularity* A

O inverzní matice

Nechť čtvercová matice A má nějakou inverzi (levou či pravou). Potom je A^{-1} současně levou i pravou inverzí, tedy

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Navíc je inverze A určena jednoznačně.

- A má pravou inverzi $\iff$ $\dim Im(A) = n$
- $\dim Im(A) = \dim Im(A^T)$
- $n = \dim Im(A^T) \iff A^T$ má pravou inverzi
    - transp. levé inverze A

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
  - dim množiny řešení k
- $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$
  - dim množiny řešení k
- $\dim Im(A) = \dim Im(A^T)$

Dimenze množiny řešení

Množina řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má stejnou dimenzi, jako množina řešení $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$