Lineární algebra pro pokročilé

Martin Černý, Hanka Salavcová

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

December 5, 2023

Inverze a LU dekompozice

Zadání problému

$(\mathbb{R}^{n\times n}, \times)$ ... prostor matic s maticovým násobením

- I_n ... jednotkový prvek
- $AI_n = I_nA = A$

1. Existují také inverzní prvky?
2. Případně za jakých podmínek?

Formulace problému - pravá inverze

Pro matici A hledáme A_p^{-1}, aby platilo $AA_p^{-1} = I_n$.

- A^{-1} nazveme (**pravá**) **inverze** matice A

Formulace problému - pravá inverze

Pro matici A hledáme A_p^{-1}, aby platilo $AA_p^{-1} = I_n$

Otázka: Jak danou inverzi spočítat?

- Označmě sloupce I_n jako $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$
- Součin $AB = C$ můžeme uvažovat po sloupcích
  - $A\mathbf{b}_{*1} = \mathbf{c}_{*1}, \ A\mathbf{b}_{*2} = \mathbf{c}_{*2}, \ \ldots, \ A\mathbf{b}_{*i} = \mathbf{c}_{*i}, \ \ldots, \ A\mathbf{b}_{*p} = \mathbf{c}_{*p}$

Pravá inverze

Formulace problému - pravá inverze

Pro matici A hledáme A_p^{-1}, aby platilo $AA_p^{-1} = I_n$

Jak danou inverzi spočítat?

- Označmě sloupce I_n jako $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$
- Součin $AB = C$ můžeme uvažovat po sloupcích
  - $A\mathbf{b}_{*1} = \mathbf{c}_{*1}$

$$A \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1i} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2i} & \ldots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{ni} & \ldots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1i} & \ldots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2i} & \ldots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mi} & \ldots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Formulace problému - pravá inverze

Pro matici A hledáme A_p^{-1}, aby platilo $AA_p^{-1} = I_n$

Jak danou inverzi spočítat?

- Označmě sloupce I_n jako $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$
- Součin $AB = C$ můžeme uvažovat po sloupcích
  - $A\mathbf{b}_{*1} = \mathbf{c}_{*1}, \; A\mathbf{b}_{*2} = \mathbf{c}_{*2}$

$$A \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1i} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2i} & \ldots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{ni} & \ldots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1i} & \ldots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2i} & \ldots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mi} & \ldots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Pravá inverze

Formulace problému - pravá inverze

Pro matici A hledáme A_p^{-1}, aby platilo $AA_p^{-1} = I_n$

Jak danou inverzi spočítat?

- Označmě sloupce I_n jako $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$
- Součin $AB = C$ můžeme uvažovat po sloupcích
  - $A\mathbf{b}_{*1} = \mathbf{c}_{*1},\ A\mathbf{b}_{*2} = \mathbf{c}_{*2},\ \ldots,\ A\mathbf{b}_{*i} = \mathbf{c}_{*i}$

$$A\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1i} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2i} & \ldots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{ni} & \ldots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1i} & \ldots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2i} & \ldots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mi} & \ldots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Pravá inverze

Formulace problému - pravá inverze

Pro matici A hledáme A_p^{-1}, aby platilo $AA_p^{-1} = I_n$

Jak danou inverzi spočítat?

- Označmě sloupce I_n jako $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$
- Součin $AB = C$ můžeme uvažovat po sloupcích
  - $A\mathbf{b}_{*1} = \mathbf{c}_{*1}, \ A\mathbf{b}_{*2} = \mathbf{c}_{*2}, \ \ldots, \ A\mathbf{b}_{*i} = \mathbf{c}_{*i}, \ \ldots, \ A\mathbf{b}_{*p} = \mathbf{c}_{*p}$

$$A\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1i} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2i} & \ldots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{ni} & \ldots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1i} & \ldots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2i} & \ldots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mi} & \ldots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Formulace problému - pravá inverze

Pro matici A hledáme A_p^{-1}, aby platilo $AA_p^{-1} = I_n$

Jak danou inverzi spočítat?

- Označmě sloupce I_n jako $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$
- Součin $AB = C$ můžeme uvažovat po sloupcích
  - $A\mathbf{b}_{*1} = \mathbf{c}_{*1},\ A\mathbf{b}_{*2} = \mathbf{c}_{*2},\ \ldots,\ A\mathbf{b}_{*i} = \mathbf{c}_{*i},\ \ldots,\ A\mathbf{b}_{*p} = \mathbf{c}_{*p}$
- Označme $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ sloupce matice A_p^{-1}

O pravé inverzi

Pokud má platit $AA_p^{-1} = I_n$, potom musí platit

$$A\mathbf{u}_i = \mathbf{e}_i, \text{ pro } \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Výpočet (pravé) inverze

$$A\mathbf{u}_i = \mathbf{e}_i, \text{ pro } \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

- n soustav lišících se pouze v pravé straně
- $\implies$ můžeme aplikovat **pouze jednu** Gaussovu eliminaci
  - průběh eliminace nezáleží na pravých stranách, pouze na A

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} I_n & A_p^{-1} \end{array} \right)$$

Další otázky spojené s inverzí...

1. Za jakých podmínek existuje inverzní matice?
2. Kdy je jednoznačně určena?

O inverzní matici (1)

Soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení pro libovolné $\mathbf{b}$ právě tehdy, když má řešení pro všechny pravé strany $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Důkaz:

1. $\Longrightarrow$
   - řešení pro každé $\mathbf{b} \implies$ řešení pro $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$
2. $\Longleftarrow$
   - $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2, \ldots, A\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n$
     - **klíčové:** $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n$
   - Hledáme $\mathbf{x}$: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
     - $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n$
     - $= b_1A\mathbf{x}_1 + b_2A\mathbf{x}_2 + \cdots + b_nA\mathbf{x}_n$
     - $= A(b_1\mathbf{x}_1 + b_2\mathbf{x}_2 + \cdots + b_n\mathbf{x}_n) = A\mathbf{x}$
     - $\implies \mathbf{x} = b_1\mathbf{x}_1 + b_2\mathbf{x}_2 + \cdots + b_n\mathbf{x}_n$

O inverzní matici (1)

Soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení pro libovolné $\mathbf{b}$ právě tehdy, když má řešení pro všechny pravé strany $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Jinými slovy:

O inverzní matici (2)

Pro matici A existuje **pravá inverze** právě tehdy, když má soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešení pro libovolnou pravou stranu $\mathbf{b}$.

Tato vlastnost lze ověřit v odstupňovaném tvaru matice A:

O inverzní matici (3)

Soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení pro libovolnou pravou stranu $\mathbf{b}$, právě když neobsahuje v odstupňovaném tvaru nulový řádek.

O inverzní matici (3)

Soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení pro libovolnou pravou stranu $\mathbf{b}$, právě když neobsahuje v odstupňovaném tvaru nulový řádek.

Důkaz:

1. $\Longleftarrow$
   - U ... odstupňovaný tvar matice A
   - Pokud U neobsahuje nulový řádek, nemůže zpětná substituce selhat a vždy zkonstruujeme řešení
2. $\Longrightarrow$
   - Nechť U obsahuje nulový řádek
   - $\Longrightarrow$ neexistuje řešení $U\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ pro $b'_m \neq 0$
   - Inverzními regulárními úpravami přejdeme k $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
   - Pro $\mathbf{b}$ neexistuje řešení (množina řešení zůstala zachována)

O inverzní matici (3)

Pro matici A existuje pravá inverze A_p^{-1}, právě když její odstupňovaný tvar neobsahuje nulový řádek.

- Pokud pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$
- $\implies$ odstupňovaný tvar má nulový řádek
- $\implies$ pro $m > n$ neexistuje pravá inverze
- pro $m = n$ a odstupňovaný tvar bez nulového řádku, platí

Jednoznačnost pravé inverze

Pokud pro čtvercovou matici existuje **pravá** inverze, poté je určena jednoznačně.

- pro $m \neq n$ nikdy není inverze určena jednoznačně
  - *dokonce ani žádný sloupec není určen jednoznačně!*

Existence a jednoznačnost pravé inverze

Matice A má pravou inverzi A_p^{-1} právě tehdy, pokud soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení pro libovolnou pravou stranu $\mathbf{b}$. A to platí tehdy, když matice A nemá v odstupňovaném tvaru žádný nulový řádek. Jednotlivé sloupečky inverze jsou řešení $A\mathbf{u}_i = \mathbf{e}_i$; typicky se počítá eliminací pro n pravých stran současně. Pokud čtvercová matice má inverzi, je určena jednoznačně.

Formulace problému - levá inverze

Pro matici A hledáme A_ℓ^{-1}, aby platilo $A_\ell^{-1}A = I_n$.

- Využijeme transpozice:
- $A_\ell^{-1}A = I_n = {I_n}^T = (A_\ell^{-1}A)^T = A^T(A_\ell^{-1})^T$

Vztah pravé a levé inverze

Pravá inverze A^T je transpozicí levé inverze A.

- $\implies$ pro levou inverzi musí platit $m \leq n$
- $\implies$ obdelníková matice nemůže mít obě inverze zároveň

Otázka: Jak je to pro čtvercové matice?

O inverzní matici

Nechť čtvercová matice A má levou či pravou inverzi A^{-1}. Potom je A^{-1} současně levá i pravá inverze, tedy $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Navíc je inverze A určena jednoznačně.

Proč je věta *O inverzní matici* překvapivá?

1. Inverze a transpozice pro čtvercové matice komutují:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

2. Čtvercová matice A je zprava invertovatelná, právě když je matice A^T zprava invertovatelná.
3. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení $\iff$ $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení
   - jednoznačnost $\iff$ jednoznačnost

O inverzní matice

Nechť čtvercová matice A má nějakou inverzi (levou či pravou). Potom je A^{-1} současně levou i pravou inverzí, tedy

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Navíc je inverze A určena jednoznačně.

Důkaz: využijeme *LU dekompozice* matic

LU dekompozice

- jedna z nejznámějších a nejdůležitějších maticových dekompozic
- i v dnešní době se využívá pro řešení soustav $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- žebříček superpočítačů *Top500* jako jedno kritérium výpočet LU dekompozice obrovské matice
- první ze série dekompozic: QR, spektrální, SVD, ...

1. součtové: $A = M + N$
   - příklad: $A = D + E$
     $$d_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & \text{pokud } i = j \\ 0 & \text{pokud } i \neq j \end{cases}, \quad e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pokud } i = j \\ a_{ij} & \text{pokud } i \neq j \end{cases}$$
   - Nevhodné pro $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
   - $D\mathbf{y} = \mathbf{b}$, $E\mathbf{z} = \mathbf{b}$
   - $\mathbf{x}$ není ve vztahu s $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$
   - $(D + E)^{-1}$ není obecně v žádném vztahu s $D^{-1} + E^{-1}$
   - Využití jinde: Jacobiho metoda, numerické metody, ...
2. součinové: $A = MN$
   - $A\mathbf{x} = (MN)\mathbf{x} = \mathbf{b}$
   - předpoklad: M, N *jednoduché* matice
   - $M\mathbf{y} = \mathbf{b}$ a $N\mathbf{x} = \mathbf{y}$

LU dekompozice

Pro matici A je ***LU dekompozice*** její součinová dekompozice ve tvaru

$$A = LU,$$

kde

1. L je dolní trojúhelníková matice s jednotkovou diagonálou, a
2. U je horní trojúhelníková matice.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Otázky:

1. Kdy LU dekompozice existuje?
2. Jak ji zkonstruovat?

Konstrukce LU dekompozice

Idea: $REF(A) = U$ … horní trojúhelníková

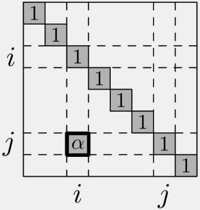
Cíl: Zakódovat průběh dopředné eliminace do L

Elementární úpravy:

1. Vynásobení řádku skalárem α
2. Přičtění α-násobku řádku k druhému
3. Prohození dvojice řádků

- $R_k \cdots R_2 R_1 A = U$
  - R_i je i-tá operace dopředné eliminace

Maticová reprezentace přičtení α-násobku řádku k řádku pod ním



Konstrukce LU dekompozice

- $(R_k R_{k-1} \cdots R_2 R_1) A = U$
- $(R_k R_{k-1} \ldots R_2 R_1)^{-1} (R_k R_{k-1} \cdots R_2 R_1) A = (R_k R_{k-1} \ldots R_2 R_1)^{-1} U$
- $\implies A = (R_1^{-1} R_2^{-1} \cdots R_{k-1}^{-1} R_k^{-1}) U = LU$

(Kdy) bude postup fungovat?

1. $R_k R_{k-1} \cdots R_2 R_1$ ... dolní trojúhelníková
2. pro R_i existuje inverze
3. $(R_k R_{k-1} \ldots R_2 R_1)^{-1}$ ... dolní trojúhelníková s 1 na diagonále

Lemma o součinu trojúhelníkových matic

Součin horních (resp. dolních) trojúhelníkových matic je horní (resp. dolní) trojúhelníková matice $U_1U_2 = U$ a $L_1L_2 = L$.

Důkaz: horní trojúhelníkové matice

- Chceme: $(U)_{ij} = 0$ pro $i > j$
- $(U)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (U_1)_{ik}(U_2)_{kj}$
- Každý člen sumy je nulový:
  - $(U_1)_{i,k} = 0$ kdykoli $i > k$
  - $(U_2)_{k,j} = 0$ kdykoli $k > j$
  - $(U_1)_{i,k}(U_2)_{k,j} \neq 0 \implies i \leq k \leq j$
  - $\implies$ nemůže nastat pro prvky pod diagonálou ($i > j$)
- pro dolní trojúhelníkové podobně

Lemma o inverzi trojúhelníkové matice

Trojúhelníková matice má inverzi (levou i pravou) právě tehdy, když má nenulovou diagonálu.

Důkaz:

1. nenulová diagonála $\Longrightarrow$ existence inverze
   - odstupňovaný tvar všechny řádky nenulové
     - horní trojúhelníková již v odstupňovaném tvaru
     - dolní trojúhelníková vynuluje prvky pod diagonálou
   - $\Longrightarrow$ existuje pravá inverze
   - $\Longrightarrow$ existuje levá inverze (pravá inverze transpozice)
2. nula na diagonále $\Longrightarrow$ neexistence inverze
   - nula na diagonále $\Longrightarrow$ nulový řádek v odstupňovaném tvaru
   - $\Longrightarrow$ neexistence pravé inverze
   - $\Longrightarrow$ neexistuje levá inverze (jinak by existovala i pravá)

Lemma o inverzi trojúhelníkových matic (2)

Inverze horní (resp. dolní) trojúhelníkové matice je horní (resp. dolní) trojúhelníková matice.

Důkaz: horní trojúhelníková matice

$$\left(\begin{array}{c|c} U & I_n \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} I_n & U^{-1} \end{array}\right)$$

- $U \rightsquigarrow I_n$
  - úpravy v horním trojúhelníku matice...
- $I_n \rightsquigarrow U^{-1}$
  - ... se projeví změnami v horním trojúhelníku matice

Existence a jednoznačnost LU dekompozice

Pokud má A pravou inverzi a lze ji odstupňovat bez prohazování řádků, potom existuje LU dekompozice a je určena jednoznačně.

Důkaz: **Existence**

- matice lze odstupňovat bez prohazování řádků
- $\implies R_i$ ... dolní trojúhelníkové
- $\implies L = (R_k R_{k-1} \dots R_2 R_1)^{-1}$ ... dolní trojúhelníková
- Jsou jedničky na digonále L?
  1. součin matic zachovává jedničky
  2. inverze matic také
     - analýza předchozích důkazů

Existence a jednoznačnost LU dekompozice

Pokud má A pravou inverzi a lze ji odstupňovat bez prohazování řádků, potom existuje LU dekompozice a je určena jednoznačně.

Důkaz: **Jednoznačnost**

- pro spor: $A = L_1U_1 = L_2U_2$ ... 2 různé rozklady
- podle definice LU dekompozice všechny diagonály nenulové
- $\implies$ existují inverze L_2^{-1}, U_1^{-1} takové, že $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$
  - $L_2^{-1}L_1$ ... dolní trojúhelníková
  - $U_2U_1^{-1}$ ... horní trojúhelníková
  - $\implies$ obě diagonální, dokonce rovny I_n
- $L_2^{-1}L_1 = I_n$, $U_2U_1^{-1} = I_n$
- $L_1 = L_2$, $U_2 = U_1$

LU dekompozice

LU dekompozice matice je rozklad $A = LU$, kde L je dolní trojúhelníková matice s jednotkovou diagonálou a U je horní trojúhelníková matice. Matice U je odstupňovaný tvar matice A a matice L vznikne složením všech úprav potřebných k odstupňování A. Aby LU dekompozice existovala, musí být možné odstupňovat A bez prohazování řádků. Pokud má A pravou inverzi, je LU dekompozice určena jednoznačně. LDU dekompozice je rozklad $A = LDU$, kde obě matice L a U mají jednotkovou diagonálu a pivoty jsou umístěny na diagonálu D.

- $A = LDU$
- $A^T = (LDU)^T = U^T D^T L^T$

LU dekompozice symetrických matic

Pokud $A = A^T$ je symetrická,

Důkaz:

- $(LDU) = U^T D^T L^T$
- $L = U^T$
- $L^T = U$

LU dekompozice obecněji

- Dopředná eliminace využívá trojici operací:
  1. Vynásobení řádku skalárem α
  2. Přičtění α-násobku řádku k druhému
  3. Prohození dvojice řádků
- 3. operaci jsme předtím zakázali

Otázka: *Jak je to s LU dekompozicí v případě, že ji potřebujeme?*

- předchozí postup selže
  - L již není dolní trojúhelníková

Otázka: *Co dělat, když potřebujeme prohazovat řádky?*

Idea: Řádky zpermutujeme před samotnou eliminací: PA

- P ... permutační matice

LU dekompozice obecněji

Pro matici A je LU dekompozice výraz $PA = LU$, kde

- P je permutační matice,
- L je dolní trojúhelníková matice s 1 na diagonále,
- U je horní trojúhelníková matice.

Pokud má A pravou inverzi, poté jsou L a U určeny jednoznačně.

Důkaz:

- idea P funguje viz. skripta prof. Hladíka (str. 65)

- existuje i pro singulární a nečtvercové matice
- L, P jsou čtvercové a mají oboustranné inverze
  - popisují regulární úpravy soustavy

LU dekompozice obecněji

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je LU dekompozice výraz $PA = LU$, kde

- $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je permutační matice,
- $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je dolní trojúhelníková matice s 1 na diagonále,
- $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je horní trojúhelníková matice.

Pokud má A pravou inverzi, poté jsou L a U určeny jednoznačně.

Důkaz: Analýza předchozího postupu (přeskočíme)

LU dekompozice obecně

Obecně je LU dekompozice rozklad $PA = LU$, kde P je vhodná permutační matice, aby bylo možné odstupňovat PA bez prohazování řádků. V případě, že má A pravou inverzi je pro každou permutační matici LU dekompozice určena jednoznačně.

Zpět k inverzním maticím...

O inverzní matice

Nechť čtvercová matice A má nějakou inverzi (levou či pravou). Potom je A^{-1} současně levou i pravou inverzí, tedy

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Navíc je inverze A^{-1} určena jednoznačně.

Důkaz:

1. hlavní část tvrzení pomocí *LU dekompozice*:
   - ukážeme pro speciální matice (trojúhelníkové)
   - LU dekompozice $PA = LU$
     - rozložení A na trojúhelníkové L, U
   - přenesení vlastností L, U na vlastnosti A
     - trochu pracné kvůli P
2. dokážeme jednoznačnost (algebraický trik)

O inverzní matice (trojúhelníkové matice)

Nechť čtvercová trojúhelníková matice T má nějakou inverzi (levou či pravou). Potom je T^{-1} současně levou i pravou inverzí, tedy

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I_n.$$

Navíc je T^{-1} určena jednoznačně.

Důkaz:

- má inverzi $\overset{lemma}{\Longrightarrow}$ má obě inverze T_p^{-1}, T_ℓ^{-1}
  - $TT_p^{-1} = I_n$, $T_\ell^{-1}T = I_n$
- jednoznačnost (levá inverze = pravá inverze)
  - $T_\ell^{-1} = T_\ell^{-1}I_n = T_\ell^{-1}TT_p^{-1} = I_nT_p^{-1} = T_p^{-1}$
- jednoznačnost (dvě různé inverze)
  - již jsme ukázali pro čtvercovou matici jednoznačnost pravé

Lemma o inverzi

Pro matici R s oboustrannou inverzí R^{-1} platí, že soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení, právě když $AR\mathbf{y} = \mathbf{b}$ má řešení.

Důkaz:

- $\Longrightarrow$
  - R má oboustrannou inverzi $\implies$ $R\mathbf{y} = \mathbf{z}$ řešení pro lib. $\mathbf{z}$
  - $\mathbf{z} = \mathbf{x}$
  - $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení
  - $\implies$ $AR\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ve dvou krocích
    1. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
    2. $R\mathbf{y} = \mathbf{x}$
- $\Longleftarrow$
  - $AR\mathbf{y} = \mathbf{b}$ má řešení
  - $\implies$ $ARR^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení (podle dokázané implikace)
    - $ARR^{-1}\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

O inverzní matice

Nechť čtvercová matice A má nějakou inverzi (levou či pravou). Potom je A^{-1} současně levou i pravou inverzí, tedy

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Navíc je inverze A určena jednoznačně.

Důkaz: využití LU dekompozice

- $PA = LU$
  - P ... oboustranná inverze P^T
  - L ... oboustranná inverze
  - U ... oboustranná inverze
- $A^T P^T = U^T L^T$
- $U^T L^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešení pro lib. $\mathbf{b}$ $\implies$ $A^T P^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešení pro lib. $\mathbf{b}$
- z předchozího lemmatu: $A^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení pro libovolné $\mathbf{b}$
- $\implies$ A^T má pravou inverzi $\implies$ transpozice levé inverze A

Důkaz věty o inverzní matici

O inverzní matice

Nechť čtvercová matice A má nějakou inverzi (levou či pravou). Potom je A^{-1} současně levou i pravou inverzí, tedy

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Navíc je inverze A určena jednoznačně.

Důkaz: využití LU dekompozice: A má levou inverzi

- využijeme transpozice: A^T má pravou inverzi

Jednoznačnost inverzní matice

Nechť X je levá inverze A a Y je pravá inverze A, tedy $XA = I_n$ a $AY = I_n$. Potom $X = Y$.

Důkaz:

- algebraický trik využívající asociativity:
- $X = XI_n = X(AY) = (XA)Y = I_nY = Y$

O inverzní matice

Nechť čtvercová matice A má nějakou inverzi (levou či pravou). Potom je A^{-1} současně levou i pravou inverzí, tedy

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Navíc je inverze A^{-1} určena jednoznačně.

Regulární matice

Čtvercová matice A je ***regulární***, pokud je *invertovatelná*.
Čtvercová matice A je ***singulární***, pokud není *invertovatelná*.