Lineární algebra pro pokročilé

Martin Černý, Hanka Salavcová

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

November 7, 2023

Posloupnosti operací a lineární kombinace

$\mathbb{V} = (V, +, \cdot)$ ... vektorový podprostor

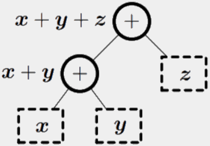
- $o : V^n \to V$ ... ***posloupnost operací***
  - *složení konečně mnoha* $+$ *a* $\cdot$

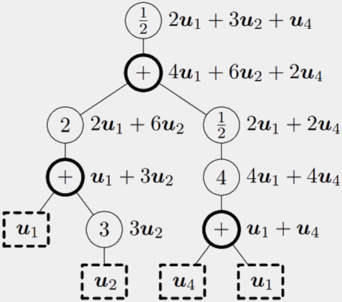
1. $o(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
2. $o_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5) = \frac{1}{2}\left(2(\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2) + \frac{1}{2}(4(\mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1))\right)$
3. $o_3(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5) = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4$

Otázka: Jak *definovat*?

Aritmetický strom operace

- *zakořeněný strom*
- *vnitřní uzly*: operace
- *listy*: vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$





Nejjednodušší tvar

$o(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5) = \frac{1}{2}\left(2(\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2) + \frac{1}{2}(4(\mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1))\right)$

- $= \frac{1}{2}\left(2\mathbf{u}_1 + 6\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_4 + 2\mathbf{u}_1\right)$
  - distributivita vnitřních závorek
- $= \frac{1}{2}\left(4\mathbf{u}_1 + 6\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_4\right)$
  - sečteme výraz uvnitř závorky
  - distributivita

$\frac{1}{2}\left(2(\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2) + \frac{1}{2}(4(\mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1))\right) \sim 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4$

Ekvivalence posloupnosti operací

Dvě posloupnosti operací jsou ***ekvivalentní***, pokud pro libovolnou n-tici vektorů dávají stejný výsledek.

Cíl: Najít mezi ekvivalentními posloupnostmi operací ty *nejjednodušší*.

- $2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4$
  - natažení vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ a jejich následné sečtení

Lineární kombinace

Lineární kombinace je n-ární posloupnost operací ℓ tvaru

$$\ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{u}_n,$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou *koeficienty lineární kombinace.*

Dva významy lineární kombinace $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{u}_n$

1. posloupnost operací $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{u}_n$
2. samotný vektor $\mathbf{v}$

Lineární kombinace

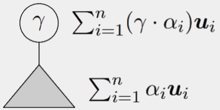
O lineární kombinaci

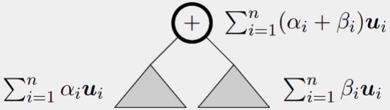
Pro každou konečnou posloupnost operací existuje lineární kombinace, která je s ní ekvivalentní.

Důkaz:

- Indukcí podle počtu operací posloupnosti
  - hloubky aritmetického stromu k

1. $k = 1$
   - list $\mathbf{u}_i$ … triviální lineární kombinace
2. Indukční krok:





Lineární kombinaci

Lineární kombinace je výraz $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i$ stejně jako i výsledek této posloupnosti operací. Pro každou konečnou posloupnost operací platí, že je ekvivalentní nějaké lineární kombinaci.

Lineární kombinace a lineární obal

- $\mathcal{L}(X) = \bigcap_{W \in \mathcal{P}, X \subseteq W} W$ ... lineární obal
  - do inkluze nejmenší VP obsahující X

Lineární obal je množina všech lineárních kombinací

Množina všech lineárních kombinací množiny vektorů X tvoří vektorový podprostor. Tento vektorový podprostor je roven $\mathcal{L}(X)$.

Důkaz: U ... množina lineárních kombinací vektorů X

1. U je vektorový podprostor
2. $\mathcal{L}(X) \subseteq U$
3. $U \subseteq \mathcal{L}(X)$

Lineární obal je množina všech lineárních kombinací

Množina všech lineárních kombinací množiny vektorů X tvoří vektorový podprostor. Tento vektorový podprostor je roven $\mathcal{L}(X)$.

Důkaz: U ... množina lineárních kombinací vektorů X

1. U je vektorový podprostor
   1.1 $X = \emptyset$
      - $\sum_{\mathbf{u}_i \in \emptyset} \alpha_i \mathbf{u}_i = ???$
      - $s \in V : s + \sum_{\mathbf{u}_i \in \emptyset} \alpha_i \mathbf{u}_i = s$
      - $\implies U = \{\mathbf{o}\}$ ... vektorový podprostor

   1.2 $X \neq \emptyset$
      - $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ a $\alpha\mathbf{x}$ ... lineární kombinace
      - $\implies U$ je vektorový podprostor

Lineární obal (pokračování důkazu)

Lineární obal je množina všech lineárních kombinací

Množina všech lineárních kombinací množiny vektorů X tvoří vektorový podprostor. Tento vektorový podprostor je roven $\mathcal{L}(X)$.

Důkaz: U ... množina lineárních kombinací vektorů X

1. U je vektorový podprostor
2. $\mathcal{L}(X) \subseteq U$
   - $\mathbf{x} \in X \implies X \subseteq U$
     - triviální lineární kombinace
   - U jeden z W v $\mathcal{L}(X) = \bigcap_{W \in \mathcal{P}, X \subseteq W} W$
3. $U \subseteq \mathcal{L}(X)$
   - $X \subseteq W \implies U \subseteq W$
     - uzavřenost W na lineární kombinace z X
   - $\implies U \subseteq \bigcap_{W \in \mathcal{P}, U \subseteq W} W = \mathcal{L}(X)$

- $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(X)$
  - $\mathbf{x}$ lze ***vygenerovat*** z množiny X
  - $\mathbf{x}$ lze zapsat jako lineární kombinaci prvků z X
- $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ ... konečná množina
  - místo: $\mathcal{L}(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\})$
  - raději: $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$

- **Otázka:** Jak určit, zda $\mathbf{b} \in \mathcal{L}(X)$?
  - $X = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$
- tedy, $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n : \quad \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n = \mathbf{b}$?
  - sloupcová interpretace soustavy rovnic:
    - $A\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$
    - $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ ... sloupce A
- $\mathbf{b} \in \mathcal{L}(X) \iff A\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$ má řešení

Lineární nezávislost a báze

- $X = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$
- $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(X)$
  - $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i$
- $\mathbf{x} \sim \boldsymbol{\alpha}$
  - $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ ... ***souřadnice*** vůči X

- **Otázka:** Platí jednoznačnost vztahu $\sim$?
  - $X = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\}$
  - $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \sim (1, 1, 0)$
  - $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \sim (0, 0, 1)$

- **Odpověď:** Nejednoznačnost $\implies$ *nadbytečné vektory*

- $X = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$
  - $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$
- $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3$

1. $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$
   - $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = (\alpha_1 + \alpha_3)\mathbf{u}_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)\mathbf{u}_2$
     - $\mathbf{u}_3$ ... *nadbytečný* vektor
2. $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1$
   - $\mathbf{x} = (\alpha_1 - \alpha_2)\mathbf{u}_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)\mathbf{u}_3$
     - $\mathbf{u}_2$ ... *nadbytečný* vektor
3. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2$
   - $\mathbf{x} = (\alpha_2 - \alpha_1)\mathbf{u}_2 + (\alpha_1 + \alpha_3)\mathbf{u}_3$
     - $\mathbf{u}_1$ ... *nadbytečný* vektor

- $\mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathcal{L}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$

Nadbytečný vektor

Vektor $\mathbf{u}$ je v množině X ***nadbytečný***, pokud $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{\mathbf{u}\})$.

Nadbytečný vektor (alternativně)

Vektor $\mathbf{u}$ je v množině X ***nadbytečný***, pokud se dá vyjádřit jako lineární kombinace ostatních.

Důležité:

- $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3$ nadbytečný v $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$
- $\not\Rightarrow$ $\mathbf{u}_1$ nadbytečný v $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$

Lineární (ne)závislost

Množina X je ***lineárně nezávislá***, pokud **ne**obsahuje *nadbytečný* vektor.

Lineární závislost

Následující definice jsou ekvivalentní:

1. Množina X obsahuje nadbytečný vektor $\mathbf{u}$.
2. V X existuje netriviální lineární kombinace $\mathbf{o}$.
3. Pro nějaký vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(X)$ existují dvě různé lineární kombinace množiny X, které ho vyjadřují.

Lineární závislost

Následující definice jsou ekvivalentní:

1. Množina X obsahuje nadbytečný vektor $\mathbf{u}$.
2. V X existuje netriviální lineární kombinace $\mathbf{o}$.

Důkaz:

- 1. $\implies$ 2.
  - $\mathbf{u}$ je nadbytečný
    - $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i$
  - $\mathbf{o} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i - \mathbf{u}$
- 1. $\impliedby$ 2.
  - $\mathbf{o} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i$
    - $\exists j : \alpha_j \neq 0$
  - $\mathbf{u}_j = \sum_{i \neq j} -\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \mathbf{u}_i = \sum_{i \neq j} \beta_i \mathbf{u}_i$
    - odečtení $\alpha_j \mathbf{u}_j$ a vydělení $-\alpha_j$
  - $\implies$ $\mathbf{u}_j$ je nadbytečný

Lineární závislost

Následující definice jsou ekvivalentní:

- 2. V X existuje netriviální lineární kombinace $\mathbf{o}$.
- 3. Pro nějaký vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(X)$ existují dvě různé lineární kombinace množiny X, které ho vyjadřují.

Důkaz:

- 3.: $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{u}_i$ $(\exists j : \alpha_j \neq \beta_j)$
- 2. $\implies$ 3.
  - $\mathbf{o} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i$ $(\exists j : \alpha_j \neq 0)$ ... netriviální lineární kombinace
  - $\mathbf{o} = \sum_{i=1}^{n} 0 \mathbf{u}_i$ ... triviální lineární kombinace
  - $\implies \mathbf{x} = \mathbf{o}$
- 3. $\implies$ 2.
  - $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{u}_i$
  - $\mathbf{o} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{u}_i$
    - $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta} \implies \exists j : \alpha_j - \beta_j \neq 0$

Lineární závislost

Následující definice jsou ekvivalentní:

1. Množina X obsahuje nadbytečný vektor $\mathbf{u}$.
2. V X existuje netriviální lineární kombinace $\mathbf{o}$.
3. Pro nějaký vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(X)$ existují dvě různé lineární kombinace množiny X, které ho vyjadřují.

Lineární **ne**závislost

Následující definice jsou ekvivalentní:

1. Množina X **ne**obsahuje nadbytečný vektor $\mathbf{u}$.
2. V X **ne**existuje netriviální lineární kombinace $\mathbf{o}$.
3. Pro **každý** vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(X)$ existují **právě jedna** lineární kombinace množiny X, které ho vyjadřují.

Lineární závislost

Množina vektorů je lineárně závislá, pokud obsahuje nadbytečný vektor, jehož odebráním se nezmění lineární obal. Naopak je lineárně nezávislá, pokud žádný nadbytečný vektor neobsahuje. Ekvivalentní definice lineární závislosti jsou, že existuje více různých lineárních kombinacích vyjadřujících ten samý vektor, nebo že existuje netriviální lineární kombinace nuly.

Konstrukce lineárně nezávislé podmnožiny

V ... vektorový podprostor

Cíl: $X \subseteq V$ lineárně nezávislá podmnožina V, že $\mathcal{L}(X) = V$

1. odebírání vektorů z V
   - problém, protože V je nekonečný
2. budováním $\emptyset = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n = X$
   - $X_i \setminus X_{i-1} = \{\mathbf{x}_i\}$ ... přidání 1 vektoru
   - *předpoklad:* konečnost lineárně nezávilých podmnožin

Konstrukce lineárně nezávislé podmnožiny

- budování $\emptyset = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n = X$
  1. $X_0 = \emptyset$
  2. $X_i = X_{i-1} \cup \mathbf{x}_i$ kde $\mathbf{x}_i \in V \setminus \mathcal{L}(X_{i-1})$
  3. X_n ... lineárně nezávislá
     - $\mathcal{L}(X_{i-1}) \subsetneq \mathcal{L}(X_i)$

Báze

Báze *podprostoru* V je lineárně nezávislá podmnožina vektorů, která generuje celý vektorový podprostor V.

- báze B neobsahuje nadbytečné vektory
- $\mathcal{L}(B) = V$

Další 2 ekvivalentní definice:

1. *Báze je do inkluze nejmenší generátor*
   - generátor G je nejmenší $\implies$ neobsahuje nadbytečný vektor $\mathbf{x} : \mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G \setminus \{\mathbf{x}\}) \implies$ definice nezávislosti
2. *Báze je do inkluze největší lineárně nezávislá množina*
   - Pokud by negenerovala celý podprostor $\implies \exists : \mathbf{x} \in V \setminus \mathcal{L}(B) \implies$ není největší

Báze vektorového prostoru

Báze je do inkluze nejmenší generátor a zároveň do inkluze největší lineárně nezávislá množina. Celý vektorový prostor lze popsat pomocí lineárních kombinací báze.

- $\mathbb{V}$ ... vektorový prostor
- $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ ... báze $\mathbb{V}$

Věta o isomorfismu

Zobrazení $f\colon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i \to (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ má následující vlastnosti:

1. je to bijektivní zobrazení mezi $\mathbb{V}$ a $\mathbb{R}^n$,
2. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$: $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{y})$,
3. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}$ a $\forall \gamma \in \mathbb{R}$: $f(\gamma \cdot \mathbf{x}) = \gamma \cdot f(\mathbf{x})$.

Důkaz:

Věta o isomorfismu

Zobrazení $f\colon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i \to (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ má následující vlastnosti:

1. je to bijektivní zobrazení mezi $\mathbb{V}$ a $\mathbb{R}^n$,

Důkaz:

1. f je *injektivní* $\quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \implies f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$
   - $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i \neq \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{b}_i$
     - $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$
   - $\implies \exists j : \alpha_j \neq \beta_j$
   - $\implies (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$
     - $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$
2. f je *surjektivní* $\quad \forall \mathbf{y} : \exists \mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$
   - $\mathbf{y} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$
   - definuje jednoznačně $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{b}_i$,
   - tedy $f(\mathbf{x}) = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$

Věta o isomorfismu

Zobrazení $f\colon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i \to (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ má následující vlastnosti::

2. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$: $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{y})$.

Důkaz:

- $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i$
  - $f(\mathbf{x}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$
- $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{b}_i$
  - $f(\mathbf{y}) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$
- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \mathbf{b}_i$
  - pomocí komutativity, asociativity a distributivity
- $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$

Věta o isomorfismu

Zobrazení $f\colon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i \to (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ má následující vlastnosti:

3. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}$ a $\forall \gamma \in \mathbb{R}$: $f(\gamma \cdot \mathbf{x}) = \gamma \cdot f(\mathbf{x})$.

Důkaz:

- $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i$
  - $f(\mathbf{x}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$
- $\gamma \cdot \mathbf{x} = \gamma \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{n} (\gamma \cdot \beta_i) \mathbf{b}_i$
  - pomocí asociativity a distributivity
- $f(\gamma \cdot \mathbf{x}) = (\gamma \cdot \alpha_1, \gamma \cdot \alpha_2, \ldots, \gamma \cdot \alpha_n)$

Co říká věta o isomorfismu?

Věta o isomorfismu

Zobrazení $f\colon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i \to (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ má vlastnosti:

1. je to bijektivní zobrazení mezi $\mathbb{V}$ a $\mathbb{R}^n$,
2. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}\colon f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{y})$,
3. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}$ a $\forall \gamma \in \mathbb{R}\colon f(\gamma \cdot \mathbf{x}) = \gamma \cdot f(\mathbf{x})$.

- **Vlastnost 1**: *Každý prvek z $\mathbb{V}$ přejmenujeme na prvek z $\mathbb{R}^n$*
- **Vlastnosti 2 a 3**: *Zachovává se **algebraická** struktura operací*
  - platnost vztahů
    1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z}$
    2. $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$
  - se přenáší během operací

Isomorfní objekty

Isomorfní objekty jsou takové objekty, které se chovají algebraicky stejně, mohou být však složeny z odlišných prvků.

Věta o isomorfismu

Věta o izomorfismu říká, že vektorový prostor s n-prvkovou bází je algebraicky totožný (isomorfní) s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^n$.

Báze jako systém souřadnic

Idea: Pohlížet na bázi B jako na *souřadnicový systém* $\mathbb{V}$

Souřadnice vekotrového podprostoru

Souřadnice *vůčí bází* B jsou $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pro $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i$

- bázické vektory = směry souřadnicových os
- délky bázických vektorů = jednotkové délky os

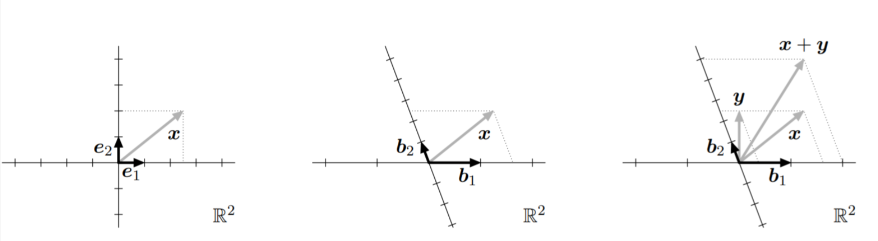
- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ... standardní vektorový prostor
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ... n-složkový vektor *souřadnic*
- vůči ***kanonické bázi*** $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$
- $$\mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \text{, a} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
- $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$

- Z věty o isomorfismu:
  - *pokud chceme sečíst* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$*, stačí sečíst vektory jejich souřadnic.*
  - *pokud chceme vynásobit* $\mathbf{x}$ *skalárem* α*, stačí vynásobit skalárem* α *vektor souřadnic*

Takto jsme definovali sčítání a násobení v $\mathbb{R}^n$!

Souřadnicové systémy vektorových prostorů

Každá n-prvková báze zavádí nad prostorem systém souřadných os a přiřazuje každému vektoru n-tici reálných čísel. Tato reálná čísla jsou koeficienty lineární kombinace vektorů báze.



- X ... báze generující $\mathcal{L}(X)$
- Otázky:
  1. Existuje jediná taková báze?
  2. Pokud ne, jak konstruovat další báze?

- $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(X)$
  - $\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$
  - $\mathbf{y} \neq \mathbf{o} \implies \exists i : \alpha_i \neq 0$
- $\mathbf{o} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{i-1}\mathbf{x}_{i-1} + \alpha_i\mathbf{x}_i + \alpha_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n - \mathbf{y}$
  - odečteme $\mathbf{y}$
- $-\alpha_i\mathbf{x}_i = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{i-1}\mathbf{x}_{i-1} + \alpha_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n - \mathbf{y}$
  - odečteme $\alpha_i\mathbf{x}_i$
- $\mathbf{x}_i = \frac{\alpha_1}{-\alpha_i}\mathbf{x}_1 + \cdots + \frac{\alpha_{i-1}}{-\alpha_i}\mathbf{x}_{i-1} + \frac{\alpha_{i+1}}{-\alpha_i}\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{-\alpha_i}\mathbf{x}_n + \frac{-1}{-\alpha_i}\mathbf{y}$
  - vydělíme $-\alpha_i \neq 0$
- $\mathbf{x}_i = \beta_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \beta_{i-1}\mathbf{x}_{i-1} + \beta_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + \beta_n\mathbf{x}_n + \beta\mathbf{y}$
  - substituce $\beta_k = \frac{\alpha_k}{-\alpha_i}$, $\beta = \frac{-1}{-\alpha_i}$

Lemma o výměně

Nechť X je libovolná množina vektorů a $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ leží v $\mathcal{L}(X)$. Potom existuje $\mathbf{z} \in X$, že

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{\mathbf{z}\} \cup \{\mathbf{y}\}).$$

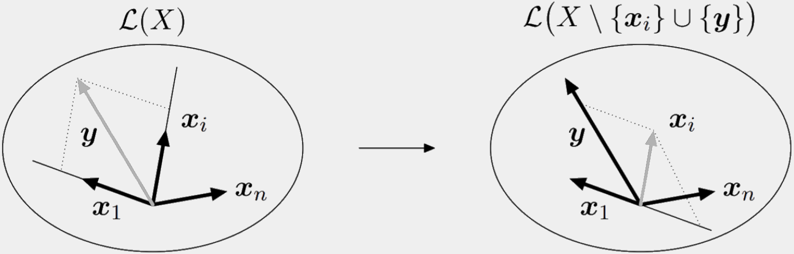
Důkaz:

- $\mathbf{z} = \mathbf{x}_i$:
  - $\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n$
  - $\mathbf{y} \neq \mathbf{o} \implies \exists i : \alpha_i \neq 0$

Lemma o výměně

Nechť X je libovolná množina vektorů a $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ leží v $\mathcal{L}(X)$. Potom existuje $\mathbf{z} \in X$, že

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{\mathbf{z}\} \cup \{\mathbf{y}\}).$$



- *Libovolný vektor může být součástí báze*
  - $\implies$ **nekonečně mnoho** bází pro nekonečné $\mathcal{L}(X)$
- *Libovolný vektor* $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(X)$ *mohu vyměnit v rámci každé báze*
  - Co kdybych měl $Y = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k\}$?

Co kdybych měl $Y = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k\}$?

- chtěl bych $Z \subseteq X$, že $\mathcal{L}(X \setminus Z \cup Y) = \mathcal{L}(X)$
  - $|Z| = |Y|$
  - $|X| = n$, $n \geq k$
- Jak získat takové Z?
  - Využití předchozího lemmatu
  - postupně přidávat $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k$
  - Kde je problém?
    - přidání $\mathbf{y}_i$ může odebrat $\mathbf{y}_j$

Kdy přidání $\mathbf{y}_i$ může odebrat $\mathbf{y}_j$?

- $X' = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{i-1}\}$
  - množina po výměně $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{i-1}$
- chceme přidat $\mathbf{y}_i$:
  - $\mathbf{y}_i = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{x}_m + \beta_1\mathbf{y}_1 + \beta_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \beta_{i-1}\mathbf{y}_{i-1}$
    - platí $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X')$
  - nemůžeme zvolit $\mathbf{z} \in X' \setminus \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{i-1}\} \implies \forall i : \alpha_i = 0$
    - $\mathbf{y}_i = \beta_1\mathbf{y}_1 + \beta_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \beta_{i-1}\mathbf{y}_{i-1}$
    - $\implies$ Y je *lineárně závislá*!

Steinitzova věta o výměně

Nechť X je libovolná množina vektorů a $Y = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k\}$ je libovolná **lineárně nezávislá** množina vektorů z $\mathcal{L}(X)$.

1. Vždy existuje $Z \subseteq X : |Z| = k$ a platí $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus Z \cup Y)$.
2. Pokud je X navíc lineárně nezávislá, je množina $X \setminus Z \cup Y$ lineárně nezávislá.

Důkaz:

1. iterativní aplikace lemmatu pro $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k$
    - lineární nezávislost Y zajistí pro $\mathbf{y}_i$ existenci $j : \alpha_j \neq 0$
2. $X \setminus Z \cup Y$ je lineárně nezávislá
    - stačí, že toto platí pro lemma o výměně (zbytek indukcí)

Lemma o výměně

Nechť X je libovolná **lineárně nezávislá** množina vektorů a $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ leží v $\mathcal{L}(X)$. Potom existuje $\mathbf{z} \in X$, že $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{\mathbf{z}\} \cup \{\mathbf{y}\})$ a $X \setminus \{\mathbf{z}\} \cup \{\mathbf{y}\}$ je **lineárně nezávislá**.

Důkaz:

- $\mathbf{o} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i + \alpha \mathbf{y}$
    - Co když $X \setminus \{\mathbf{z}\} \cup \{\mathbf{y}\}$ je lineárně závislá?
- $\mathbf{o} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{o}$ má triviální řešení
    - X je lineárně nezávislá
- $\alpha \neq 0 \implies \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i \implies \mathbf{y} \in \mathcal{L}(X \setminus \{\mathbf{z}\})$
- $\mathcal{L}(X \setminus \{\mathbf{z}\}) = \mathcal{L}(X \setminus \{\mathbf{z}\} \cup \{\mathbf{y}\}) = \mathcal{L}(X)$
    - spor s lineární nezávislostí X

Steinitzova věta o výměně

Nechť X je libovolná množina vektorů a $Y = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k\}$ je libovolná **lineárně nezávislá** množina vektorů z $\mathcal{L}(X)$.

1. Vždy existuje $Z \subseteq X : |Z| = k$ a platí $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus Z \cup Y)$.
2. Pokud je X navíc lineárně nezávislá, je množina $X \setminus Z \cup Y$ lineárně nezávislá.

- řada silných a důležitých důsledků

Důsledek Steinitzovy věty 1: Rozšíření na bázi

Libovolnou lineárně nezávislou množinu vektorů lze rozšířit na bázi.

Důkaz:

- X báze prostoru, Y lineárně nezávislá množina

Steinitzova věta

Steinitzova věta o výměně říká, že v libovolné množině X můžeme zaměnit k jejích vektorů za jinou k-prvkovou lineárně nezávislou množinu z $\mathcal{L}(X)$, aniž bychom změnili lineární obal.

- využijeme Steinitzovu větu k definici *dimenze*
- ***Dimenze*** *prostoru* je velikost jeho libovolné báze
  - Kde bereme jistotu, že $|B_1| = |B_2|$?

O velikosti dimenze

Nechť $\mathbb{V}$ je vektorový prostor a nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ a $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ jsou dvě jeho báze. Potom platí, že $m = n$.

Důkaz:

- X, Y označení bází, obě lineárně nezávislé
  - $\implies$ lze aplikovat oba body Steinitzovy věty o výměně
- protože můžeme povyměňovat vektory X za vektory $Y \implies n \geq m$
- protože můžeme povyměňovat vektory Y za vektory $X \implies m \geq n$
  - $m = n$

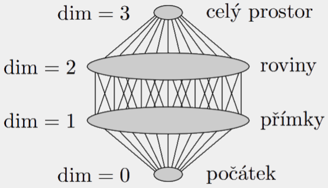
Dimenze prostoru

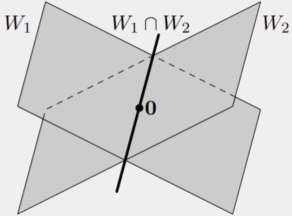
- ***Dimenze*** *prostoru* je velikost jeho libovolné báze
  - (dobře definováno díky Steinitzovy)
- značení: $\dim \mathbb{V}$
- podle věty o isomorfismu: $\mathbb{V}$ s $\dim \mathbb{V} = n$ je isomorfní $\mathbb{R}^n$
- navíc pro $\mathbb{R}^m$, kde $m \neq n$ není $\mathbb{V}$ isomorfní
  - liší se velikostí báze
  - ani $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ nejsou isomorfní pro $m \neq n$

- možná existence *dimenze* není překvapivá
  - Ale měla by!
  - obecně pro struktury spíše výjimka
- příklad: grupy
  - $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ se sčítáním modulo 6
  - $\{1\}$ je minimální generátor, protože přičítání 1 vygeneruje vše
  - $\{2, 3\}$ je minimální generátor, protože ani $\{2\}$ ani $\{3\}$ není!

Dimenze

Pro každý vektorový (pod)prostor existuje číslo zvané dimenze, které udává jeho velikost. Toto číslo je velikost libovolné báze, podle Steinitzovy věty jsou všechny báze stejně velké.





- již při studiu úplného svazu $(\mathcal{P}, \subseteq)$ jsme naznačili dimenzi $\mathbb{R}^3$
- v řeči bází:
  - $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, protože $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ je báze
  - dimenze podprostorů z množiny $\{0, 1, 2, 3\}$

Podprostory geometricky

- dimenze podprostorů z množiny $\{0, 1, 2, 3\}$
  - *Dimenze 0*
    - lineární obal prázdné množiny $\implies \{\mathbf{o}\}$
    - infimum přes množinu všech podprostorů
  - *Dimenze 1*
    - lineární obal jediného nenulového vektoru $\mathcal{L}(\mathbf{u})$
    - přímka procházející počátkem ve směru $\mathbf{u}$
    - nekonečně mnoho takových přímek
  - *Dimenze 2*
    - lineární obal dvou lineárně nezávislých vektorů
    - rovina obsahující přímky dané směry těchto vektorů a všechny jejich kombinace
    - posouvání jedné přímky ve směru druhé
    - nekonečně mnoho přímek
  - *Dimenze 3*
    - celý prostor $\mathbb{R}^3$ pro libovolnou bázi
    - supremum přes množinu všech podprostorů

Proč uvažovat různé báze?

1. pochopení struktury reálných dat
   - při měření množina vektorů z $\mathbb{R}^n$
   - v kanonické bázi vlastnosti *skryté*
   - v jiné bázi *zřejmé*
     - $\implies$ používá se v matematické statistice
2. pochopení lineárních zobrazení
   - lineární zobrazení jsou dána maticově
   - často složitá struktura
   - $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -0.5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
   - přechodem k jiné bázi lze zjednodušit
   - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- náplň lineární algebry 2: hledání *hezkých* bází