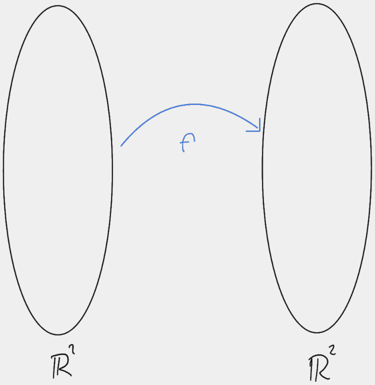
Lineární algebra pro pokročilé

Martin Černý, Hanka Salavcová

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

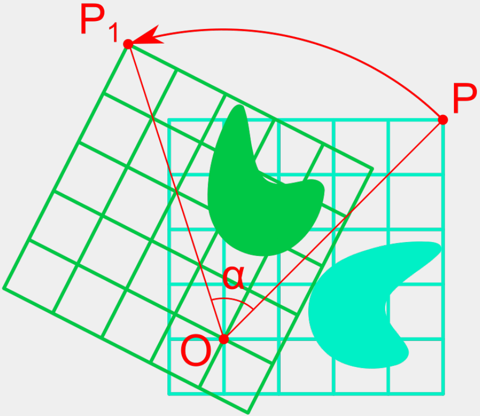
October 17, 2023

Lineární zobrazení

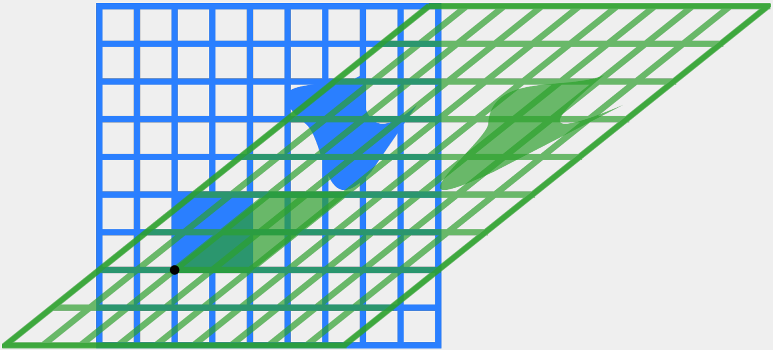


- **Cíl**: *Pochopit, o jaká se jedná zobrazení a jak je reprezentovat*

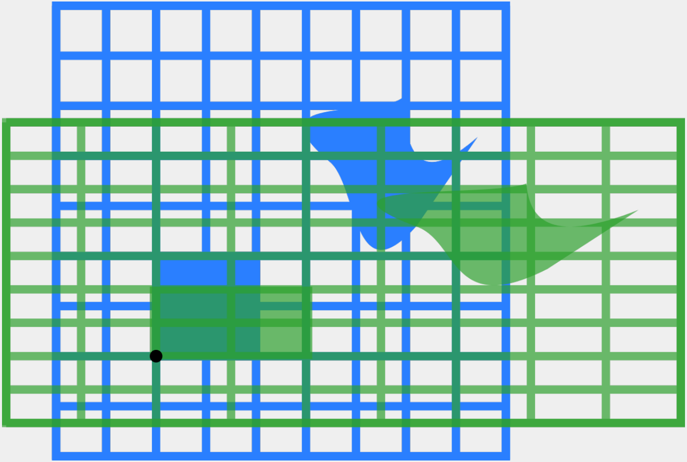
Lineární zobrazení v $\mathbb{R}^2$: Rotace



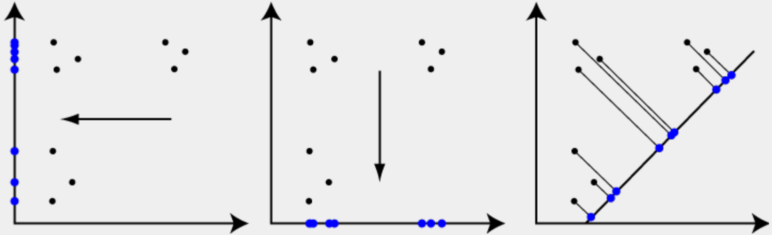
Lineární zobrazení v $\mathbb{R}^2$: Zkosení



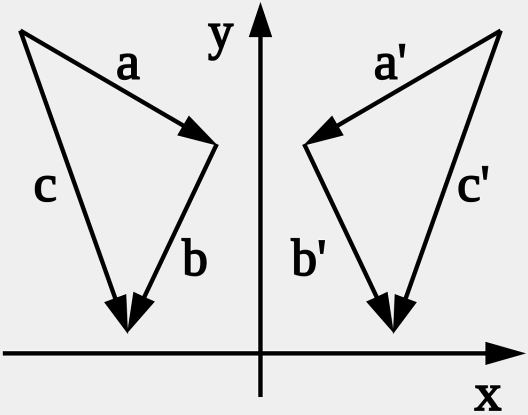
Lineární zobrazení v $\mathbb{R}^2$: Škálování



Lineární zobrazení v $\mathbb{R}^2$: Projekce (na osu x)



Lineární zobrazení v $\mathbb{R}^2$: Zrcadlení



JAK DEFINOVAT LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ?

1. *přímka se zobrazí na přímku*
   - $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x} \implies f(\mathbf{y}) = \beta f(\mathbf{x})$
   - $\beta = \alpha$
     - patrné ze škálování, ale i všech ostatních příkladů
     - nebylo by nutné, ale bude se nám zásadně hodit pro reprezentaci
2. *rovnoběžnostěn se zobrazí na rovnoběžnostěn*
   - $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})$
   - $f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$

Lineární zobrazení

Zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je ***lineární*** pokud splňuje:

1. *homogenitu*: $f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$ pro $\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$,
2. *aditivitu*: $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

- Jak reprezentovat lineární zobrazení?
  1. vypsat dvojice $\mathbf{x} \to f(\mathbf{x})$
     - $\implies$ nekonečně mnoho dvojic, neefektivní
  2. Pomocí obrazů kanonické báze
     - $f((a, b)) = f(a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1)) =$
     - $f(a \cdot (1, 0)) + f(b \cdot (0, 1)) =$
     - $a \cdot f(1, 0) + b \cdot f(0, 1)$
     - $\implies f(a, b) = a \cdot f(\mathbf{e}_1) + b \cdot f(\mathbf{e}_2)$
- Jak *reprezentovat* prostor $\mathbb{R}^2$?
  1. seznam dvojic (a, b)
     - $\implies$ stejný problém
  2. *Souřadnicový systém* z kanonických vektorů $\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)$
  - Vektor $(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1)$
     - ***lineární kombinace*** kanonických vektorů
     - *koeficienty* kombinace jsou souřadnice a, b

Obraz vektoru při lineárním zobrazení

Vektor o souřadnicích a, b v kanonické bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ se zobrazí na vektor o souřadnicích a, b vzhledem k $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)$, tj.

$$f((a, b)) = a \cdot f(\mathbf{e}_1) + b \cdot f(\mathbf{e}_2).$$

- zde je patrné, proč požadujeme homogenitu $\beta = \alpha$

Popis lineárního zobrazení

K popisu lineárního zobrazení nám stačí znát obrazy kanonických vektorů $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)$.

Jak reprezentovat lineární zobrazení? Rozepsání

- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$
- $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$
- $f(\mathbf{x}) = x_1 \cdot f(\mathbf{e}_1) + x_2 \cdot f(\mathbf{e}_2)$
- $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$
- $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$
- $y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$
- $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Násobení matice a vektoru

Násobení matice A a vektoru $\mathbf{x}$ definujeme jako

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

a značíme $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ... lineární zobazení
- **Cíl:** Maticová reprezentace A_f
    1. Určíme $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)$
    2. Dáme do sloupců matice A_f
- $A_f = \begin{pmatrix} | & | \\ f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) \\ | & | \end{pmatrix}$

Rovnoměrné škálování 2-krát

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Škálování 2-krát ve směru osy x a (-3)-krát ve směru osy y

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Projekce na osu danou $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zkosení roviny

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lineární zobrazení - rotace o 90°

Rotace o $\frac{\pi}{2}$ (90°) proti směru hodinových ručiček

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lineární zobrazení - rotace o úhel α

Rotace o α proti směru hodinových ručiček

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Zrcadlení podle osy dané $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zrcadlení podle přímky procházející počátkem pod úhlem α jako složení několika zobrazení

Otázka: *Jak reprezentovat skládání zobrazení v řeči matic?*

1. Rot_{α}... rotace o α
2. $R_{\mathbf{e}_1}$ .. reflexe podle osy dané $\mathbf{e}_1$

- $Rot_{\alpha}(R_{\mathbf{e}_1}(Rot_{2\pi-\alpha}))$ ... reflexe podle přímky

Jak reprezentovat skládání zobrazení v řeči matic?

- A_f ... matice reprezentující f
- A_g ... matice reprezentující g
- $A_{g\circ f}$ ... matice reprezentující $g \circ f$
- $f(\mathbf{e}_1) = A_f\mathbf{e}_1$
- $f(\mathbf{e}_2) = A_f\mathbf{e}_2$
- $g(\mathbf{x}) = A_g\mathbf{x}$
- $g(f(\mathbf{e}_1)) = A_g\,(f(\mathbf{e}_1)) = A_g(A_f\mathbf{e}_1) = \left(A_gA_f\right)\mathbf{e}_1$
- $g(f(\mathbf{e}_2)) = A_g\,(f(\mathbf{e}_2)) = A_g(A_f\mathbf{e}_2) = \left(A_gA_f\right)\mathbf{e}_2$

Jak reprezentovat skládání zobrazení v řeči matic?

- A_f … matice reprezentující f
- A_g … matice reprezentující g
- $A_{g \circ f}$ … matice reprezentující $g \circ f$

- $\left(A_{g \circ f}\right) \mathbf{e}_1 = g(f(\mathbf{e}_1)) = \left(A_g A_f\right) \mathbf{e}_1$
- $\left(A_{g \circ f}\right) \mathbf{e}_2 = g(f(\mathbf{e}_2)) = \left(A_g A_f\right) \mathbf{e}_2$

$$\begin{pmatrix} | & | \\ g(f(\mathbf{e}_1)) & g(f(\mathbf{e}_2)) \\ | & | \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} | & | \\ g(\mathbf{e}_2) & g(\mathbf{e}_2) \\ | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | \\ f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f$$

Násobení matice a vektoru

Násobení matice A s maticí B definujeme jako

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

a značíme $A \cdot B$.

Zrcadlení podle přímky procházející počátkem pod úhlem α jako složení několika zobrazení

- 1. Rot_α... rotace o α
  2. $R_{\mathbf{e}_1}$ .. reflexe podle osy dané $\mathbf{e}_1$
- $Rot_\alpha(R_{\mathbf{e}_1}(Rot_{2\pi-\alpha}))$ ... reflexe podle přímky

Otázka: *Jak reprezentovat skládání zobrazení v řeči matic?*

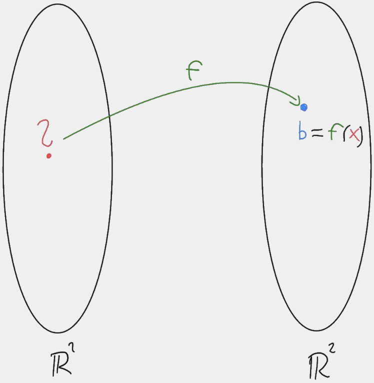
1. $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
2. $A_{\mathbf{e}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $A_\alpha \cdot A_{\mathbf{e}_1} \cdot A_{2\pi-\alpha}$
- $\begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta & -\cos\alpha\cdot\sin\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta & -\sin\alpha\cdot\sin\beta - \cos\alpha\cdot\cos\beta \end{pmatrix}$

Shrnutí $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Co tedy reprezentuje $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

1. soustavu lineárních rovnic
2. problém určení koeficientů lineární kombinace
3. $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ - určení vzoru vektoru $\mathbf{b}$ při zobrazení $f(\mathbf{x})$



Souřadnicové systémy

TODO: na tabuli

Ještě jeden pohled na lineární zobrazení:

- Lineární zobrazení f je ***regulární***, pokud k němu existuje inverzní f^{-1} takové, že $(f^{-1} \circ f)(\mathbf{x}) = (f \circ f^{-1})(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$
  - transformaci lze *vrátit* $\implies$ existuje A^{-1}
  - nedeformuje vektorový prostor
- poté $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)$ reprezentují nový souřadnicový systém
  - $\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)$
  - $f(\mathbf{e}_1) = (1, 1), f(\mathbf{e}_2) = (2, 3)$
  - $\mathbf{x} = (5, 7)$
  - souřadnice $\mathbf{x}$ vůči souřadnicovému systému $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)$ jsou $(1, 2)$ protože $f(\mathbf{e}_1) + 2f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{x}$
  - značíme $[\mathbf{x}]_{\{(1,1),(2,3)\}} = (1, 1)$
- *Regulární lineární zobrazení tedy reprezentuje přechod mezi různými souřadnicovými systémy*

1. Obecné ***vektorové prostory***
   - $(\mathbb{R}, +, \cdot) \implies (V, \bigoplus, \bigotimes)$
     - obecné VP
   - $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \implies \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$
     - obecné souřadnicové systémy (***báze***)
   - pomocné pojmy:
     - ***lineární kombinace***
     - ***lineární nezávislost***
     - ***lineární obaly***
2. Obecná ***lineární zobrazení*** $f : V \to U$
   - nad obecnými prostory U, V
   - maticové reprezentace
   - inverzní zobrazení f^{-1}
   - přechod mezi souřadnicovými systémy $[\mathbf{x}]_{B_2} = {}_{B_2}[A]_{B_1}\,[\mathbf{x}]_{B_1}$
   - ***fundamentální podprostory***
     - lepší pochopení lineárních zobrazení